ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო

უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

სადოქტორო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

ზვიად ყალიჩავა

ზოგიერთი არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი

მათემატიკაში დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ჯემალ ფერაძე - ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი

თბილისი

2021

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

Name of Doctoral Program: Mathematics

Zviad Kalichava

Some Approximate Methods of Solution of Certain Boundary Value Problems

Thesis submitted for the degree of Ph.D. in Mathematics

Scientific adviser:

Jemal Peradze – Doctor of Phys.- Math. Sci.

Associated Professor

Tbilisi

2021

აბსტრაქტი

წარმოდგენილ სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ძელის რხევის ს. ტიმოშენკოს ტიპის ორი მათემატიკური მოდელი. თითოეული მოდელი წარმოდგენილია არაწრფივი ჰიპერბოლური დიფერენციალური განტოლებით ან განტოლებათა სისტემით, გარკვეულ საწყის-სასაზღვრო პირობებში. ჩვენ მიზანს წარმოადგენდა შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანებისთვის მიახლოებითი ალგორითმების შემუშავება, სიზუსტის კვლევა და რიცხვითი ტესტირება.

ჩვენ ავაგეთ სამეტაპიანი რიცხვითი ალგორითმები, რომელთა შემადგენელი ნაწილებია: პროექციული მეთოდი ტრიგონომეტრიული ან უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქციებით, სიმეტრიული არაცხადი მდგრადი სხვაობიანი სქემები, ნიუტონის ან პიკარის იტერაციული პროცესები. შეფასდა თითოეული ალგოთიმის შემადგენელი მეთოდების სიზუსტე, რის შედეგადაც შესაძლებელი გახდა ყოველი გამოყენებული ალგორითმისათვის სრული ცდომილების შეფასება. ტესტური მაგალითების ამოხსნის შედეგები ადასტურებდა აგებული ალგორითმების ეფექტურობას.

დისერტაციის კვლევის თეორიულ-მეთოდოლოგიურ საფუძველს წარმოადგენდა მეთოდებისა და დებულებების საკმაოდ ფართე სპექტრი. ალგორითმების სიზუსტის გამოსავლენად ჩვენ გამოვიყენეთ აპრიორული შეფასებების მეთოდი, კუმშვითი ასახვის პრინციპი, გრონუოლის ინტეგრალური უტოლობა, ბიჰარი-ლანგენჰოფის ლემა, გერშგორინის წრეები, ლ. კანტოროვიჩის თეორემა, შერმან-მორისონის ფორმულა, უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქციების მააპროქსიმებელი თვისებები, მწკრივების კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი, ტრაპეციების განზოგადოებული კვადრატურული ფორმულის ცდომილების დაზუსტებული შეფასებები და სხვა.

ჩვენ მიერ შემოთავაზებული ალგორითმები ახალია იმ გაგებით, რომ განხილული ამოცანების მიმართ სხვა მკვლევარებს მეთოდების ასეთი კომბინაცია არ გამოუყენებიათ. თეორიული კვლევის და რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები გვაძლევს საფუძველს ვივარაუდოთ, რომ ჩვენ მიერ აგებული ალგორითმები გამოიწვევს ინტერესს რიცხვითი მეთოდებისა და გამოთვლითი მექანიკის შესაბამისი დარგის სპეციალისტებს შორის.

როგორც წინასწარმა შეფასებამ გვიჩვენა, სადისერტაციო ნაშრომის თეორიული შედეგების გავრცელება შესაძლებელია იმ ამოცანებზე, რომლებშიც ტიმოშენკოს ტიპის დინამიკური განტოლება აკმაყოფილებს სულ ცოტა ერთ მოთხოვნას ქვემოთ ჩამოთვლილი სამი პირობიდან. სახელდობრ, დავუშვათ, განტოლება

1. განიხილება ზოგად ფუნქციურ სივრცეში
2. შეესაბამება დაშვებას, რომ კავშირი ძაბვასა და დეფორმაციას შორის უფრო ზოგადი ხასიათისაა, ვიდრე ჰუკის კანონის მოქმედების შემთხვევაში
3. არის სივრცულად ორგანზომილებიანი, რაც ხშირად იმის მანიშნებელია, რომ მოცემული განტოლებით აღიწერება ფირფიტისა და გარსის რხევა.

ნაშრომის პრაქტიკულ მნიშვნელობასთან დაკავშირებით აღვნიშნოთ შემდეგი

1. ძელები, რომელთა რხევა აღიწერება ნაშრომში განხილული განტოლებებით, წარმოადგენს სამშენებლო კონსტრუქციების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ნაწილს. ამიტომ აღნიშნული განტოლებების ამოხსნის მეთოდებს აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა.

2. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნაშრომში შეფასებულია შემოთავაზებული ალგორითმების სრული ცდომილება. თითოეულ შემთხვევაში სრული ცდომილების შეფასების ფორმულაში გამოყენებულია საკმაოდ ბევრი პარამეტრი. ყველა პარამეტრისთვის, გამონაკლისის გარეშე, ამოწერილია ფორმულა ან ფორმულათა ჯგუფი, რომელიც გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში საშუალებას იძლევა გამოვითვალოთ შესაბამისი პარამეტრის მნიშვნელობა ან მისი ზედა ზღვარი. ამან შეიძლება გარკვეული პრაქტიკული ღირებულება შეიძინოს. კერძოდ, ვფიქრობთ, რომ შედეგად შესაძლებელი გახდება ისეთი გამოთვლითი პროცესის წინასწარ დაგეგმვა, რომელიც უზრუნველყოფს პასუხის მიღებას მოთხოვნილი სიზუსტით. მაშასადამე, კომპიუტერზე გამოთვლების დაწყებამდე შესაძლებელი იქნება იმის გარკვევა, თუ რამდენი ბაზისური ფუნქცია უნდა იყოს გამოყენებული ალგორითმის პროექციულ ეტაპზე, როგორი უნდა იყოს ბადის ბიჯი სხვაობიან სქემაში, რამდენი იტერაცია უნდა შესრულდეს, რათა პასუხის საბოლოო ცდომილება არ აღემატებოდეს წინასწარ დასახელებულ სიდიდეს, რაც მოგვცემს საშუალებას მივიღოთ შედეგი სასურველი სიზუსტით, კომპიუტერული დროის მინიმალური დანახარჯით.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება ორი თავისაგან, განხილული მოდელების რაოდენობის შესაბამისად. თითოეულ თავში მოყვანილია ამა თუ იმ მოდელთან ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები. ნაშრომი შეიცავს 115 ნაბეჭდ გვერდს. ციტირებული ლიტერატურის ნუსხაში მითითებულია 74 პუბლიკაცია.

Abstract

The present dissertation focuses on the mathematical models of the S. Timoshenko type of beam oscillation. Each model is represented by a nonlinear hyperbolic differential equation or system of equations under certain initial-boundary conditions. We aim to develop approximate algorithms for the relevant initial-boundary problems, accuracy study and numerical testing.

We have constructed three-step numerical algorithms that consist of a projection method with trigonometric or section-linear finite element functions, symmetric indefinitely stable difference schemes, iterative processes of Newton or Picard. The accuracy of the constituent methods of each algorithm was evaluated, making it possible to estimate the total error for each algorithm used. The results of solving test examples confirmed the effectiveness of the built algorithms.

The theoretical-methodological basis of the dissertation represents a wide range of methods and provisions. To demonstrate the accuracy of the algorithms, we used the method of a priori estimation, the principle of contractile reflection, the Gronwall integral inequality, the Lemma of Bihari-Langenhof, the circles of Gershgorin, the theory of L.Kantorovich, the formula of Sherman-Morrison, approximate properties of linear finite element functions, the integral test for convergence, a refined estimations of the errors for the generalized quadratic formula of trapezoids and so on.

The algorithms we propose are new since other researchers have not applied such a combination of methods to the tasks under consideration. The results of theoretical research and numerical experiment give us the reason to assume that the algorithms we have built will arouse interest among specialists in the relevant field of numerical methods and computational mechanics.

As the preliminary evaluation showed, the theoretical results of the dissertation can be extended to tasks in which the Timoshenko type dynamic equation meets at least one of the three conditions listed below. Namely, the equation

1. considered in a general functional space

2. consistent with the assumption that the relationship between stress and strain is more general than in the case of Hook's law
3. is spatially two-dimensional, which often indicates that the given equation describes the oscillation of the plate and shell.

As for the practical value of the dissertation, the following should be mentioned

1. The beams, the oscillation of which is described by the equations discussed in the paper, are one of the most important parts of building structures. Therefore the methods of solving these equations are of practical importance;

2. As already mentioned, the paper evaluates the complete error of the proposed algorithms. In each case, quite many parameters are used in the complete error estimation formula. For every parameter, without exception, a formula or group of formulas is written, which, under certain conditions, allows us to calculate the value of the corresponding parameter or its upper limit. We think that as a result, it will be possible to plan such a computational process in advance, which will ensure that the result is obtained with the required accuracy. Consequently, before starting the computation on the computer, it will be possible to find out how many basic functions should be used in the projection stage of the algorithm, what the grid step should be in the differential scheme, how many iterations should be performed so that the final error does not exceed the pre-named value. With precision, with minimal cost of computer time.

The dissertation consists of two chapters according to the number of models discussed. Each chapter presents the results we have obtained with this or that model. The paper contains 115 printed pages. The list of cited literature indicates 74 publications.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი 11

თავი I. მიახლოებითი ალგორითმი დინამიკური ძელის ინტეგრო-დიფერენციალური არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის

ნაწილი I. ამოცანის დასმა...18

1. განტოლება და საწყის-სასაზღვრო პირობები 18

2. ამოხსნადობა 19

3. კერძო შემთხვევა 20

ნაწილი II. ალგორითმი 21

4. გალიორკინის მეთოდი 21

5. სხვაობიანი სქემა 21

6. ნიუტონის იტერაციული პროცესი 22

ნაწილი III. ალგორითმის სიზუსტე 24

7. გალიორკინის მეთოდის სიზუსტე 24

7.1. ზუსტი ამონახსნის მთავარი ნაწილის ნორმის შეფასება 24

7.2. მიახლოებითი ამონახსნის ნორმის შეფასება 26

7.3. $c_{1l}(t)$ პარამეტრების გამოთვლის შესახებ 27

7.4. რამდენიმე დამხმარე უტოლობა 28

7.5. გალიორკინის მეთოდის ცდომილების შეფასება 37

8. სხვაობიანი სქემის სიზუსტე 40

8.1. განტოლებათა სისტემა ცდომილებისათვის 40

8.2. სისტემის მატრიცული სახე 41

8.3. შერმან-მორისონის ფორმულის გამოყენება 43

8.4. აპრიორული უტოლობები 44

8.5. მატრიცების ნორმების შეფასება 48

8.6. სხვაობიანი სქემის ცდომილების შეფასება 56

9. ნიუტონის იტერაციული პროცესის სიზუსტე 59

9.1. იაკობიანის შებრუნებული მატრიცის ნორმის შეფასება ………...........61
9.2. დამხმარე უტოლობები ……………………………………………………64
9.3. კანტოროვიჩის ლემა …………………………………………………….67
9.4. თეორემა კრებადობის შესახებ ……………………………………………69
10. ალგორითმის სრული ცდომილება …………………………………….70
10.1. სრული ცდომილების განსაზღვრება …………………………………...70
10.2. ალგორითმის სრული ცდომილების შეფასება ……………………….....70
10.3. მაგალითი …………………………………………………………………..71

თავი II. რიცხვითი ალგორითმი ტიმოშენკოს ძელის არაწრფივი სისტემი-სათვის

ნაწილი I. ამოცანის დასმა …………………………………………………………....74
1. განტოლებათა სისტემა და საწყის-სასაზღვრო პირობები……………….....74
2. სისტემის დაყვანა პირველი რიგის განტოლებათა სისტემაზე…………….75

ნაწილი II. ალგორითმი ……………………………………………………………....76
3. სასრულ ელემენტთა მეთოდი ……………………………………………....76
4. სხვაობიანი სქემა ……………………………………………………………...79
5. იტერაციული პროცესი ………………………………………………………....80

ნაწილი III. ალგორითმის ცდომილება ………………………………………..81
6. დამხმარე დებულებები……………………………………………………….81
6.1. უტოლობები K, M და Q მატრიცებისთვის ……………………………...81
6.2. უტოლობები A, B და C ბლოკური მატრიცებისთვის…………………..81
7. სასრულ ელემენტთა მეთოდის სიზუსტე…………………………………84
7.1. ცდომილების განსაზღვრება და განტოლება ცდომილებისთვის…….84
7.2. აპრიორული შეფასებები …………………………………………………..85
7.3. სასრულ ელემენტთა მეთოდის ცდომილების შეფასება……………….91
8. სხვაობიანი სქემის სიზუსტე………………………………………………..93
8.1. განტოლება ცდომილებისთვის …………………………………………...93
8.2. დამხმარე შეფასება ………………………………………………………….94
8.3. სხვაობიანი სქემის ცდომილების შეფასება……………………………….96
9. იტერაციული პროცესის სიზუსტე ………………………………………….98

9.1. ცდომილების განსაზღვრება ……………………………………………98
9.2. დამხმარე უტოლობა ………………………………………………………99
9.3. იტერაციული პროცესის ცდომილება …………………………..………100
10. ალგორითმის სრული ცდომილება …………………………………………103
10.1. სრული ცდომილების განსაზღვრება ……………………………………103
10.2. ალგორითმის სრული ცდომილების შეფასება …………………………103
10.3. რიცხვითი ექსპერიმენტი …………………………………………………104
დასკვნა..108
ლიტერატურა …………………………………………………………………………109

შესავალი

დისერტაციის პირველ თავში აგებული და შესწავლილია ერთი რიცხვითი ალგორითმის ეტაპები შემდეგი სახის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისთვის [36]–[39]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) - h\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x,t) - \left(\lambda + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t),$$

$$0 < x < L, \quad 0 < t \le \mathrm{T},$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0.$$

მოცემული განტოლება, რომელიც ტიმოშენკოს (Timoshenko) თეორიაზე [70] დაყრდნობით მიღებულია ჰენრიკო დე-ბრიტოს (Henriques de Brito) [32], [33] მიერ, აღწერს ძელის რხევას. $u(x,t)$ და $f(x,t)$ ძელის გადაადგილებისა და ძალის ფუნქციებია, შესაბამისად. $f(x,t) = 0$, $\lambda = 0$ შემთხვევისთვის ზემოთ მოყვანილი განტოლება პრიზმატული ძელისთვის კარმანის (Karman) განტოლებათა სისტემიდან ზღვარზე გადასვლის შედეგად მიღებულია მენზალასა (Menzala) და ზუაზუას (Zuazua) [51], [52] მიერ. თუ $f(x,t) = 0$, $h = 0$, განტოლება ემთხვევა ვოინოვსკი-კრიგერის (Woinowsky-Krieger) [74] კარგად ცნობილ ძელის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial v^4}(x,t) - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,$$

$$\alpha_0, \alpha_1 > 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \le T.$$

შესაბამის მოდელს სწავლობდნენ დიკეი (Dickey) [23], ბოლი Ball [7], ხოლო ჰილბერტის სივრცეში იხილავდა მედეირიოსი (Medeiros) [46]. მსგავსი სახის პრობლემებზე მუშაობდნენ ლიონსი (Lions) [42], [43], მენზალა (Menzala) [50], პოხოჟაევი (Pokhozhaev) [62] და რივერა (Rivera) [64]. ჰენრიკო დე-ბრიტოს (Henriques de Brito) ძელის მათემატიკურ მოდელს და მის ზოგიერთ განზოგადებას უთმობდნენ ყურადღებას თავიანთ ნაშრომებში მეცნიერები აროზიო (Arosio) [3], ბაე (Bae), პარკი (Park), ჯონგი (Jeong) [4], ბალაჩანდრანი (Balachandran), პარკი (Park) [5],

ბალაჩანდრანი (Balachandran), პარკი (Park), ჯანგი (Jung) [6], დე ანდრადე (De Andrade) [22], კოუსინი (Cousin) [20], მედეიროსი (Medeiros), ლიმაკო (Limaco), მენეზესი (Menezes) [47], [48].

აქ ჩვენ ავაგებთ ერთ მიახლოებით ალგორითმს აღნიშნული ამოცანისთვის და შევისწავლით მის სიზუსტეს. რიცხვითი ალგორითმები ძელის სტატიკური და დინამიკური, მსგავსი არაწრფივობის მქონე ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებისთვის და განტოლებათა სისტემებისთვის გამოკვლეულია რამდენიმე ნაშრომში. დავასახელოთ ზოგიერთი მათგანი. სტატიკური შემთხვევები განხილულია [10], [44] და [55]-ში. ბერიკელაშვილის (Berikelashvili), პაპუკაშვილისა (Papukashvili) და ფერაძის (Peradze) [10] მიერ სტატიკური ძელის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება, გრინის მეთოდის საშუალებით, დაყვანილია არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამონახსის საპოვნელად გამოყენებულია იაკობის (Jacobi) იტერაცია. დადგენილია იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობები, შეფასებულია ცდომილება. მა (Ma) [44], არაწრფივი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, ამტკიცებს ამონახსნის არსებობას და მის საპოვნელად იყენებს სხვაობიან მეთოდს. ფერაძის (Peradze) [55] სტატიაში ხისტად ჩამაგრებული ძელისთვის განტოლების ამოსახსნელად გამოყენებულია ალგორითმი, რომელიც ეფუძნება გალიორკინის მეთოდს და იაკობი-კარდანოს (Jacobi-Cardano) იტერაციას. რიცხვითი ალგორითმები ტიმოშენკოს დინამიკური ძელისთვის განხილულია [11], [12], [17], [18], [36]-[39], [56] ნაშრომებში. მიახლოებითი მეთოდი ტიმოშენკოს (Timoshenko) არაწრფივი თერმოვისკოელასტიკური ძელის კონტაქტური ამოცანისთვის შემოთავაზებულია ბერნარდი და კოპეტის (Bernardi, Copetti) [11], [12] მიერ. ამოცანის კორექტულობის დამტკიცების შემდეგ შესაბამისი სისტემის, რომელიც შეიცავს სამ განტოლებას, მიახლოებით ამოსახსნელად ავტორებმა გამოიყენეს სასრულ ელემენტთა მეთოდი, ეილერისა (Euler) და კრანკ-ნიკოლსონის (Crank-Nicolson) სქემები, შეისწავლეს დისკრეტული ამოცანა და ჩაატარეს რიცხვითი ექსპერიმენტი. [17]-ში ჩუსა (Choo) და ჩანგის (Chung)-ის მიერ გამოყენებულია არაცხადი სხვაობიანი სქემა, დამტკიცებულია მისი ამოხსნადობა, მდგრადობა, შეფასებულია ცდომილება, ამოხსნილია ტესტური მაგალითი. მე-[18] სტატიის ავტორები ჩუ (Choo), ჩანგი (Chung), კენანი (Kannan) სივრცული და დროის ცვლადების მიმართ იყენებენ სასრულ ელემენტთა მეთოდს და იკვლევენ დისკრეტიზაციის კრებადობის

საკითხს. ყალიჩავასა (Kalichava) [36] და ყალიჩავა (Kalichava), ფერაძის (Peradze) [37], [38] მიერ დასმული ამოცანის ამონახსნის სივრცული ცვლადის მიერ მიახლოების მიზნით გამოყენებულია გალიორკინის მეთოდი და შეფასებულია მისი ცდომილება, ხოლო დისკრეტული სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად იგივე ავტორე-ბი [39] შრომაში იყენებენ ნიუტონის იტერაციულ მეთოდს, ხოლო შემდეგ კანტორო-ვიჩის (Kantorovich) [35] ცნობილ შედეგზე დაყრდნობით ადგენენ იტერაციული პრო-ცესის კრებადობის პირობებს და სიჩქარეს. [56] სტატიაში, აღნიშნული განტოლების ერთგვაროვანი შემთხვევისათვის, ფერაძის (Peradze) მიერ შესწავლილია ამონახსნის მიახლოება სივრცული ცვლადის მიმართ. როგავა (Rogava) და წიკლაური (Tsiklauri) [65] კირხჰოფის (Kirchhoff) რხევის მოცემული განტოლების მსგავსი აბსტრაქტული ანალოგისთვის იყენებენ სამშრიან ნახევრადდისკრეტულ სქემას და ამტკიცებენ მის ლოკალურ კრებადობას.

შევნიშნოთ, რომ პარაბოლური ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა ზოგიერთი კლასისთვის რიცხვითი მეთოდები გამოკვლეულია ჯან-გველაძის (Jangveladze), კიღურაძისა (Kiguradze) და ნეტას (Neta) [34] მონოგრაფიაში. ოდიშარიას (Odisharia) [54] მიერ რეისნერის (Reissner) განტოლებათა სისტემიდან სამშრიანი სიმეტრიულად დატვირთული ფირფიტისათვის გამოყოფილია ზემოთ ნახსენები განტოლების არაწრფივობის მქონე განტოლება, დამტკიცებულია მისი ამო-ნახსნის არსებობა, ერთადერთობა, მიახლოებითი პროცესის კრებადობა და, ბელმან-ბიჰარის (Bellman-Bihari) ლემის გამოყენებით, მიღებულია იმ დროის ინტერვალის ზედა საზღვარი, რომელზედაც უზრუნველყოფილია ლოკალური ამოხსნადობა.

დასმული ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მიზნით, განხილული გვაქვს სამ-ეტაპიანი ალგორითმი. სივრცული ცვლადის მიმართ მიახლოების მისაღებად ამონახსნს ვეძებთ გალიორკინის (Galerkin) მეთოდით, რომელშიც ბაზისურ ფუნქციებად ვიყენებთ სინუს-ფუნქციებს. შედეგად მიიღება კოშის ამოცანა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემისთვის. შემდეგ ეტაპზე, რომელზეც გათვალისწინებულია ამონახსნის მიახლოება დროის ცვლადის მიმართ, გამოიყენება კრანკ-ნიკოლსონის (Crank-Nicolson) არაცხადი სიმეტრიული სხვაობიანი სქემა. მიახლოების ბოლო საფეხურზე დისკრეტიზების შედეგად მიღებული არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება ნიუტონის

(Newton) იტერაციული მეთოდი. ალგორითმის აღწერას მოჰყვება მისი შემადგენელი თითოეული მეთოდის სიზუსტის შეფასება. აპრიორული შეფასებების მეთოდის, შერმან-მორისონის (Sherman-Morrison) ფორმულის და სხვა დებულებებისა და ფორმულების გამოყენებით მიიღება პროექციული მეთოდის და სხვაობიანი სქემის ცდომილებების ზედა საზღვრები. რაც შეეხება იტერაციული მეთოდის ცდიომილებას, მის შესაფასებლად გამოიყენება კანტოროვიჩის (Kantorovich) თეორემა არაწრფივ განტოლებათა სისტემებისათვის ნიუტონის იტერაციული პროცესის კრებადობის შესახებ. ალგორითმის შემადგენელი მეთოდების ცდომილებების შეფასებების საშუალებით მიღებულია ალგორითმის სრული ცდომილების ზედა საზღვარი. გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში, მიღებულია შესაბამის გამოსახულებებში მონაწილე ყველა კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულა, რაც ალგორითმის სრული ცდომილების ზედა საზღვრის გამოთვლის საშუალებას იძლევა. შემოთავაზებული ალგორითმი გამოყენებულია ტესტური ამოცანის ამოსახსნელად.

მეორე თავში განვიხილავთ ამოცანას ძელის არაწრფივი რხევის შესახებ. ამისათვის გამოვიყენებთ ტიმოშენკოს (Timoshenko) ცნობილ მოდელს [70]. კირხჰოფ-ლავეს (Kirchhoff-Love) კლასიკური მოდელისგან განსხვავებით, ტიმოშენკოს მოდელში გათვალისწინებულია განივი ძალა და ბრუნვითი ინერცია, რაც არსებითად მნიშვნელოვანია ბევრი ამოცანის ამოხსნისას [25], [26].

განვიხილავთ განტოლებათა სისტემას

$$w_{tt} = \left(cd - a + b \int_0^1 w_x^2 \, dx \right) w_{xx} - cd\psi_x \,,$$
$$\psi_{tt} = c\psi_{xx} - c^2 d(\psi - w_x),$$
$$0 < x < 1, \;\; 0 < t \leq T,$$

რომელშიც საძიებელი $w(x,t)$ და $\psi(x,t)$ ფუნქციები ძელის შუა ხაზის განივი გადახრა და განივი კვეთის ბრუნვითი გადაადგილებაა.

სისტემაში არაწრფივი წევრის უკუგდების შედეგად მიიღება ტიმოშენკოს დინამიკური ძელის წრფივი სისტემა, რომლისთვის ამონახსნის არსებობა გამოკვლეულია კიმისა (Kim) და რენარდის (Renardy) მიერ [40]. ამ სისტემისა და მისი ზოგიერთი განზოგადებისთვის გამოკვლეულია რიცხვითი მეთოდების თვისებები. სემპერის (Semper) მიერ [67] შემოთავაზებულია ნახევრადდისკრეტული და სრულადდისკრე-

ტული გალიორკინის მეთოდი რხევადი ძელისთვის და მიღებულია კრებადობის ოპ-ტიმალური რიგი. რამდენიმე სასრულელემენტიანი მოდელი განიხილა რედიმ (Reddy) [63]. [28]-ში ფენგმა (Feng) და სხვებმა შეისწავლეს ნახევრადდისკრეტული და სრულადდისკრეტული კერძო პროექციული სასრულ ელემენტთა მეთოდი და გლუ-ვი ამონახსნის არსებობის პირობებში ძელის სისქეზე დამოუკიდებელ მუდმივათა გამოყენებით მიიღეს კრებადობის ოპტიმალური რიგი. ჩენგმა (Cheng) და ხუემ (Xue) [16] განიხილეს სასრულელემენტიანი მიახლოება და მცირე სისქის პარამეტრის გამოყენებით, მიიღეს ცდომილების ერთგვაროვანი ოპტიმალური შეფასება. [29]-ში ფრანკა (Franca) და ლოულა (Loula) გვთავაზობენ შერეულ სასრულელემენტიან აპროქსიმაციას. წინასწარ დატვირთული ძელებისთვის სხვაობიანი სქემების სიზუს-ტეს იკვლევდნენ დუკეში (Ducceschi) და ბილბაო (Bilbao) [24]. ფუ-ლე ლი (Fu-le Li), ჩი-ჩონგ სანი (Zhi-Zhong Sun) [30] და ალმეიდა ჯუნიორი (Almeida Junior) [1] სწავლობდნენ რამდენიმე სხვაობიან სქემას. სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებში ძელის თავისუფალი რხევის ანალიზის მიზნით, ტორაბიმ (Torabi) [69] და სხვებმა გა-მოიყენეს ვარიაციული იტერაციული მეთოდი და შეაფასეს სიზუსტე და კრებადობის სიჩქარე.

ახლა რაც შეეხება არაწრფივი ძელის ტიმოშენკოს (Timoshenko) მოდელს, რომე-ლიც აღიწერება ზემოთ მყვანილი სისტემით ან მსგავსი სისტემებით. კლაეისენმა (Claeyssen) [19], საპირმა (Sapir) და რეისმა (Reiss) [66] გამოიყენეს ეს მოდელი ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად. ტუკსნაკმა (Tucsnak) [72] და ემერიმ (Ammari) [2] გამოიკვლიეს აღნიშნული სისტემა, ხოლო მისი გარკვეული განზოგადებისათვის ამონახსნის არსებობა და ასიმპტოტური ყოფაქცევა, ნარკისოსა (Narciso) და კოზინის (Cousin) [53] მიერ ასევე გამოკვლეულია ამოხსნადობის პრობლემა აღნიშნული ტიპის სისტემისთვის, რომელშიც არაწრფივი ინტეგრალური წევრის საზღვრები წარმოადგენს დროის ცვლადზე დამოკიდებულ ფუნქციებს. რიცხვითი ალგორითმი ტიმოშენკოს არაწრფივი თერმოვისკოელასტიკური ძელის კონტაქტური ამოცანებისთვის შემოთავაზებულია ბერნარდისა (Bernardi) და კოპეტის (Copetti) [11], [13] მიერ. ამოცანის კორექტულობის დამტკიცების შემდეგ, შესაბამისი სისტემის, რომელიც შეიცავს სამ განტოლებას, მიახლოებითი ამოხსნის მიზნით, ავტორებმა გა-მოიყენეს სასრულ ელემენტთა მეთოდი, ეილერისა (Euler) და კრანკ-ნიკოლსონის

(Crank-Nicolson) სქემები, შეისწავლეს დისკრეტული ამოცანა და ჩაატარეს რიცხვითი ექსპერიმენტი. საწყისი ფუნქციების ანალიტიკურობის შემთხვევაში ზემოთ მოცემული სისტემის ამოსახსნელად ფერაძემ (Peradze) [57] გამოიყენა გალიორკინის (Galerkin) მეთოდი, კრანკ-ნიკოლსონის (Crank-Nicolson) ტიპის სხვაობიანი სქემა, პიკარის (Picard) იტერაციული მეთოდი და შეაფასა ალგორითმის სიზუსტე, ხოლო [58]-ში გამოიყენა იაკობის (Jacobi) იტერაციული მეთოდი და კარდანოს (Cardano) ფორმულა.

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ტიმოშენკოს (Timoshenko) დინამიკური ძელის არაწრფივი სისტემისათვის მიახლოებითი ალგორითმის აგება და მისი სიზუსტის შეფასება [60].

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული სისტემის არაწრფივი წევრი პირველად გამოყენებული იქნა კირხჰოფის (Kirchhoff) [41] მიერ 1876 წელს რხევადი სიმის მოდელში. ეს წევრი თავის ზოგიერთ მოდიფიკაციასა და განზოგადებასთან ერთად გვხვდება ბევრ განტოლებაში, რომლებიც აღწერენ ძელების, ფირფიტებისა და გარსების მდგომარეობას. აღნიშნული სახის განტოლებები განხილულია შემდეგ პუბლიკაციებში: ბოლი (Ball) [7], ბარგერი (Berger) [9], ბურგრინი (Burgreen) [15], ერინგენი (Eringen) [27], ჰენრიკო დე-ბრიტო (Henrique de Brito) [32], მედეიროსი (Medeiros) [46], ფერაძე (Peradze) [59], ვაჰი (Wah) [73], ვოინოვსკი-კრიგერი (Woinowsky-Krieger) [74] და ა. შ. ამასთან დაკავშირებით ვვარაუდობთ, რომ ჩვენი მიდგომა გამოიწვევს გარკვეულ ინტერესს და გამოყენებული იქნება აღნიშნული არაწრფივობის შემცველი განტოლებებისა და სისტემების ამოსახსნელად.

თავდაპირველად, მოცემული ამოცანა დაიყვანება საწყის სასაზღვრო ამოცანაზე პირველი რიგის განტოლებათა სისტემისთვის. შემდეგ, მიღებული ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მიზნით, ვიხილავთ სამ ეტაპიან ალგორითმს. სივრცული ცვლადის მიმართ მიახლოების ეტაპზე ამონახსნს ვეძებთ სასრულ ელემენტთა მეთოდით, რისთვისაც ვიყენებთ უბან-უბან წრფივ ბაზისურ ფუნქციებს. შედეგად მიიღება კოშის ამოცანა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემისთვის.

შემდეგ ეტაპზე, რომელზეც გათვალისწინებულია ამონახსნის მიახლოება დროის ცვლადის მიმართ, გამოიყენება არაცხადი სიმეტრიული სქემა, რომელიც წარმო-

ადგენს კრანკ-ნიკოლსონის (Crank-Nicolson) სქემის ვარიანტს. არაცხადობით გამოწ-ვეული სიძნელე კომპენსირდება ამ სისტემის მაღალი სიზუსტით და მდგრადობით დამრგვალებებით გამოწვეული ცდომილებების მიმართ.

მიახლოების ბოლო ეტაპზე დისკრეტიზების შედეგად მიღებული არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება პიკარის ტიპის იტერაციული პროცესი. ალგორითმის აღწერის შემდეგ ყურადღება ეთმობა ალგორითმის თითოეული ნაწილის ცდომილების შეფასებას. აპრიორული შეფასებების მეთოდის გამოყენებით მიიღება სასრულ ელემენტთა მეთოდისა და სხვაობიანი სქემის ცდომილებების ზედა საზღვრები. რაც შეეხება იტერაციული პროცესის ცდომილებას, მის შესაფასებლად გამოიყენება კუმშვითი ასახვის პრინციპი. ალგორითმის შემადგენელი ნაწილების ცდომილებების შეფასებების საშუალებით მიღებულია ალგორითმის სრული ცდომილების ზედა საზღვარი. გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში მიღებულია შესაბამის გამოსახულებებში მონაწილე ყველა პარამეტრის გამოსათვლელი ფორმულა, რაც ალგორითმის სრული ცდომილების ზედა საზღვრის გამოთვლის საშუალებას იძლევა. შემოთავაზებული ალგორითმი გამოყენებულია ტესტური ამოცანების ამოსახსნელად. მოყვანილია გამოთვლების შე-დეგები.

თავი I

მიახლოებითი ალგორითმი დინამიკური ძელის ინტეგრო-დიფერენციალური არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის

რეზიუმე. ტიმოშენკოს (Timoshenko) ჰიპოთეზებზე დაყრდნობით, განხილულია ჰენრიკო დე-ბრიტოს (Henriques de Brito) მიერ მიღებული ინტეგრო-დიფერენციალური არაერთგვაროვანი განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) - h\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x,t) - \left(\lambda + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,t)\right)^2 d\xi\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t),$$

რომელიც აღწერს ძელის რხევას. კოში-დირიხლეს საწყის-სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, აგებულია რიცხვითი ალგორითმი, რომლის შემადგენელი ნაწილებია გალიორკინის მეთოდი, არაცხადი სიმეტრიული სხვაობიანი სქემა და ნიუტონის იტერაციული პროცესი. შესწავლილია ალგორითმის სიზუსტის საკითხი. ამოხსნილია ტესტური მაგალითი.

ნაწილი I. ამოცანის დასმა

1. განტოლება და საწყის-სასაზღვრო პირობები. [36]–[39] შრომებში აგებულია და შესწავლილი ერთი რიცხვითი ალგორითმის ეტაპები

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) - h\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x,t) - \left(\lambda + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$0 < x < L, \quad 0 < t \le \mathrm{T},$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x), \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0,$$

სახის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისთვის, სადაც h არაუარყოფითი და λ დადებითი მუდმივებია. აგრეთვე, $u^0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,L)$, $u^1(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,L)$, $f(x,t) \in L_2\left(0,L;\ \overset{0}{W}{}_2^1(0,L)\right)$ მოცემული ფუნქციებია, ამასთან, $u^0(0) = u^1(0) = u^0(L) = u^1(L) = 0$.

(1.1) განტოლება, რომელიც ტიმოშენკოს (Timoshenko) თეორიაზე [70] დაყრდნობით მიღებულია ჰენრიკო დე-ბრიტოს (Henriques de Brito) [32], [33] მიერ, აღწერს ძელის რხევას. $u(x,t)$ და $f(x,t)$ ძელის გადაადგილებისა და ძალის ფუნქციებია, შესაბამისად.

2. ამოხსნადობა. [32]-ში დამტკიცებულია კოშის ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

$$(I + hA)u'' + A^2u + \left[\lambda + M\left(\left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2\right)\right]Au = f$$

ოპერატორული განტოლებისთვის, რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (1.1), (1.2) ამოცანა. გამოვიყენოთ [32]-ის შედეგი (1.1), (1.2) ამოცანის მიმართ.

$(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ სკალარული ნამრავლი $L_2(0,L)$ სივრცეში. ვთქვათ, $\overset{0}{W}{}_2^2(0,L)$ შეიცავს ფუნქციებს $W_2^2(0,L)$ სივრციდან, რომლებიც ნულის ტოლია საზღვარზე. [32]-ის თანახმად, თუ

$$u^0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,L), \quad u^1(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,L), \quad f(x,t) \in L_2\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,L)\right), \tag{2.1}$$

მაშინ არსებობს ისეთი $u = u(x,t)$ ფუნქცია,

$$u \in L^\infty\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,L)\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty\big(0,T;\ W_2^1(0,L)\big), \tag{2.2}$$

რომელიც წარმოადგენს (1.1), (1.2) ამოცანის განზოგადებულ ამონახსნს, ე. ი. ყოველი $v = v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,L)$-თვის შესრულდება

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\ ,v\right) + h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \left(\lambda + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = (f,v) \tag{2.3}$$

და

$$u(x,0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = u^1(x). \tag{2.4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება პირობა (2.1). (2.2)-ის გათვალისწინებით (1.1), (1.2) ამოცანის ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\,(t) sin\frac{i\pi x}{L}. \tag{2.5}$$

ასევე, $f(x,t)$ ფუნქციაც წარმოვადგინოთ შემდეგი მწკრივის სახით

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,(t) sin\frac{i\pi x}{L}. \tag{2.6}$$

(2.1)-(2.4) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ v ფუნქციებად აირჩევა $\sin\frac{i\pi x}{L}$ ფუნქციები, $i = 1, 2, \dots$, მაშინ $u_i(t)$ კოეფიციენტებისთვის მიიღება

$$\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right) u_i''(t) + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 u_i(t) + \left(\lambda + \frac{L}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 u_j^2(t)\right)\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i(t) = f_i(t), \tag{2.7}$$

$$i = 1, 2, \dots\,, \quad 0 < t \le T,$$

ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

საწყისი პირობებით

$$u_i(0) = u_i^0, \quad u_i'(0) = u_i^1, \quad i = 1, 2, \dots\,, \tag{2.8}$$

სადაც

$$f_i(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{i\pi x}{L}\,dx\,,$$
$$u_i^0 = \frac{2}{L}\int_0^L u^0(x)\sin\frac{i\pi x}{L}\,dx, \quad u_i^1 = \frac{2}{L}\int_0^L u^1(x)\sin\frac{i\pi x}{L}\,dx\,. \tag{2.9}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.5) და (2.2)-დან გამომდინარეობს

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 u_i^2(t)\,, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^2 u_i^2(t) \tag{2.10}$$

მწკრივების კრებადობა.

3. კერძო შემთხვევა. დავუშვათ, რომ (1.2)-ში საწყისი ფუნქციებისთვის მართებულია წარმოდგენა

$$u^0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^0 \sin\frac{i\pi x}{L}, \quad u^1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^1 \sin\frac{i\pi x}{L}, \;\; 0 \le x \le L. \tag{3.1}$$

ქვემოთ ზოგჯერ ვიგულისხმებთ, რომ (3.1) გაშლის კოეფიციენტებისთვის სრულდება უტოლობები

$$(u_i^0)^2 \le \frac{\omega_0}{i^{p_0+5}}\,, \qquad (u_i^1)^2 \le \frac{\omega_1}{i^{p_1+3}}\,, \qquad i = 1, 2, \dots , \tag{3.2}$$

ხოლო $f_i(t)$ ფუნქციებისთვის (2.6)-დან ადგილი აქვს უტოლობას

$$f_i^2(t) \le \frac{\omega}{i^{p+1}}\,, \;\; 0 \le t \le T, \quad i = 1, 2, \dots \tag{3.3}$$

აქ $p_l, \omega_l,\;\; l = 0{,}1,$ და $p,\; \omega$ დადებითი რიცხვებია.

ნაწილი II. ალგორითმი

4. გალიორკინის მეთოდი. მოვახდინოთ ამონახსნის მიახლოება x ცვლადის მიმართ. ამისათვის გამოვიყენოთ გალიორკინის მეთოდი. ამონახსნი ვეძებოთ სასრული მწკრივის სახით

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}\,(t) \sin\frac{i\pi x}{L}\,, \tag{4.1}$$

სადაც $u_{ni}(t)$ კოეფიციენტები

$$\left(1 + h\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\right)u''_{ni}(t) + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 u_{ni}(t) + \left(\lambda + \frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 u_{nj}^2(t)\right)\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_{ni}(t) = f_i(t), \tag{4.2}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 < t \le T,$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია შემდეგი საწყისი პირობებით

$$u_{ni}(0) = u_i^0, \quad u'_{ni}(0) = u_i^1, \qquad i = 1, 2, \dots, n\,. \tag{4.3}$$

5. სხვაობიანი სქემა. (4.2), (4.3) ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ სხვაობიანი მეთოდი. ამისათვის, დროის $[0, T]$ ინტერვალზე, შემოვიღოთ ბადე $\tau = \frac{T}{M}$ ბიჯით, $0 < \tau < 1$, და $t_m = m\tau,\;\; m = 0, 1, \dots, M,$ კვანძებით.

m-ურ შრეზე, ე. ი. $t = t_m$-თვის, $u_{ni}(t_m)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ u_{ni}^m-ით.

გამოვიყენოთ კრანკ-ნიკოლსონის ტიპის სქემა

$$\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{u_{ni}^{m+1}-2u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1}}{\tau^2}$$
$$+\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left[\left(\frac{u_{nj}^{m+1}+u_{nj}^{m}}{2}\right)^2+\left(\frac{u_{nj}^{m}+u_{nj}^{m-1}}{2}\right)^2\right]\right)\right\}$$
$$\times\frac{u_{ni}^{m+1}+2u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1}}{4}=\ f_i^m, \tag{5.1}$$
$$m=1,2,\dots,M-1,\ \ i=1,2,\dots,n,$$
$$u_{ni}^0=u_i^0\ ,\quad \frac{u_{ni}^1-u_{ni}^0}{\tau}=u_i^1+\frac{\tau}{2}u_i^2\ ,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{5.2}$$
$$u_i^2=\frac{1}{1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}-\left\{f_i^0-\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2+\lambda+\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(u_{nj}^0\right)^2\right]\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2u_{ni}^0\right\}.$$

აქ და (5.1)-ში

$$f_i^m\text{=}f_i(t_m). \tag{5.3}$$

ამონახსნის მიახლოება t_m კვანძში წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამის სახით

$$u_n^m(x)=\ \sum_{i=1}^{n}u_{ni}^m\sin\frac{i\pi x}{L}\ . \tag{5.4}$$

6. ნიუტონის იტერაციული პროცესი. განვიხილოთ (5.1), (5.2) სისტემის ამოხსნის ნიუ-ტონის იტერაციული მეთოდი.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned} v_{ni}^{m+1}&=\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m}}{\tau},\\ w_{ni}^{m+1}&=\frac{i\pi}{L}\frac{u_{ni}^{m+1}+u_{ni}^{m}}{2}\end{aligned} \tag{6.1}$$

და გადავწეროთ

$$\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{u_{ni}^{m+1}-2u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1}}{\tau^2}$$
$$+\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left[\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(\left(\frac{u_{nj}^{m+1}-u_{ij}^{m}}{2}\right)^2+\left(\frac{u_{nj}^{m}-u_{ni}^{m-1}}{2}\right)^2\right)\right]\right\}$$
$$\times\frac{u_{ni}^{m+1}+2u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1}}{4}\ =f_i^m \tag{6.2}$$

სისტემა შემდეგნაირად

$$\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\left(\frac{v_{ni}^{m+1}-v_{ni}^{m}}{\tau}\right)$$
$$+\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3+\frac{i\pi}{L}\left[\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(w_{nj}^{m+1}\right)^2+\left(w_{nj}^{m}\right)^2\right)\right]\right\}\frac{w_{ni}^{m+1}+w_{ni}^{m}}{2}=f_i^m, \tag{6.3}$$

$$\frac{w_{ni}^{m+1}-w_{ni}^{m}}{\tau}=\frac{i\pi}{L}\frac{v_{ni}^{m+1}+v_{ni}^{m}}{2}\ , \quad m=1,2,\dots,M-1, \tag{6.4}$$

$$v_{ni}^1=u_i^1+\frac{1}{2}u_i^2, \qquad w_{ni}^1=\frac{i\pi}{L}\left[u_i^0+\frac{1}{2}\tau\left(u_i^1+\frac{1}{2}\tau u_i^2\right)\right]. \tag{6.5}$$

(6.4)-დან v_{ni}^{m+1} გამოვსახოთ v_{ni}^{m}-ის, w_{ni}^{m}-ისა და w_{ni}^{m+1}-ის საშუალებით

$$v_{ni}^{m+1}=-v_{ni}^{m}+\frac{2L}{i\pi}\frac{w_{ni}^{m+1}-w_{ni}^{m}}{\tau} \tag{6.6}$$

და გამოვიყენოთ ეს ტოლობა (6.3)-ში. შედეგად მივიღებთ

$$\varphi_i(w_{n1}^m,w_{n2}^m,\dots,w_{nn}^m)=0, \tag{6.7}$$
$$m=2,3,\dots,M,\quad i=1,2,\dots,n,$$

სადაც

$$\varphi_i(w_{n1}^m,w_{n2}^m,\dots,w_{nn}^m)=\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{2L}{\tau^2 i\pi}(w_{ni}^m-w_{ni}^{m-1})$$
$$+\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3+\frac{i\pi}{L}\left[\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(w_{nj}^{m}\right)^2+\left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right]\right\}\frac{w_{ni}^{m}}{2}$$
$$+\frac{i\pi}{L}\frac{L}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(w_{nj}^{m}\right)^2\right)\frac{w_{ni}^{m-1}}{2}+\Psi_i \tag{6.8}$$

და

$$\Psi_i=-2\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{v_{ni}^{m-1}}{\tau}$$
$$+\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3+\frac{i\pi}{L}\left[\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right]\right\}\frac{w_{ni}^{m-1}}{2}-\ f_i^m. \tag{6.9}$$

(6.7) სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ მიახლოებით, შრიდან შრეზე გადასვლით. ეს ნიშნავს შემდეგს: ვთქვათ, $(m-1)$-შრეზე ამონახსნი ნაპოვნია. ვიგულისხმოთ, რომ აღნიშნული მიახლოება მიღებულია ისეთი სიზუსტით, რომ შეიძლება შესაბამისი ცდომილების უგულებელყოფა. m-ურ შრეზე ამონახსნის მისაღებად გამოვიყენოთ ნიუტონის იტერაციული პროცესი

$$\boldsymbol{w}_{nk+1}^m=\boldsymbol{w}_{nk}^m-J^{-1}(\boldsymbol{w}_{nk}^m)\ \varphi(\boldsymbol{w}_{nk}^m),\quad k=0,1,\dots, \tag{6.10}$$

სადაც $\boldsymbol{w}_{nk}^m = (w_{nik}^m)_{i=1}^n$, w_{nik}^m არის w_{ni}^m სიდიდის k-ური იტერაციული მიახლოება, $J(\boldsymbol{w}_{nk}^m)$-იაკობიანი (იაკობის მატრიცი), $\varphi(\boldsymbol{w}_{nk}^m) = \left(\varphi_i(\boldsymbol{w}_{nk}^m)\right)_{i=1}^n$. w_{nik}^m სიდიდეები გამოიყენება u_{ni}^m პარამეტრების მიახლოებების მისაღებად, ამ საკითხზე ქვემოთ შევჩერდებით.

ნაწილი III. ალგორითმის სიზუსტე

7. გალიორკინის მეთოდის სიზუსტე. ახლა ჩვენი მიზანია შევაფასოთ გალიორკინის მეთოდის ცდომილება, რომელსაც განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

$$\Delta u_n(x,t) = u_n(x,t) - u(x,t). \tag{7.1}$$

7.1. ზუსტი ამონახსნის მთავარი ნაწილის ნორმის შეფასება. (3.1) გაშლის გათვალისწინებით შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\pi_n u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i\,(t) \sin\frac{i\pi x}{L}\,, \tag{7.2}$$

რომელსაც შეიძლება ვუწოდოთ ამოცანის ზუსტი ამონახსნის მთავარი ნაწილი. შევაფასოთ მისი ნორმა. $\|\quad\|$-ით აღვნიშნოთ ნორმა $L_2(0,L)$-სივრცეში.

ლ ე მ ა 7 . 1 . სრულდება შეფასება

$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\pi_n u(x,t)\right\| \le c_{1l-1}(t), \tag{7.3}$$

$$0 < t \le T, \quad l = 1,2.$$

$c_{10}(t)$-ისა და $c_{11}(t)$-ის ფორმულები მოცემულია ქვემოთ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . გავამრავლოთ (2.7) განტოლება $Lu_i'(t)$-ზე და ავჯამოთ მიღებული ტოლობა $i = 1, 2, \ldots$ -ის მიმართ.

თუ გამოვიყენებთ (2.5)-ს, (2.9)-ს და აღნიშვნას

$$\Phi(t) = \|u_t(x,t)\|^2 + h\|u_{xt}(x,t)\|^2 + \|u_{xx}(x,t)\|^2 + \frac{1}{2}(\lambda + \|u_x(x,t)\|^2)^2, \tag{7.4}$$

მაშინ შედეგი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\Phi'(t) = L\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\, u_i'(t).$$

(2.5), (2.6)-ის თანახმად, $0 < t \le T$-თვის, მივიღებთ

$$\Phi(t) = \Phi(0) + L\int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\tau)\, u_i'(\tau) d\tau \le \Phi(0) + L\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i'^2(\tau)\right) d\tau$$

$$= \Phi(0) + 2\int_0^t \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{\infty} u_i'^2(\tau)\right) d\tau$$

$$= \Phi(0) + 2\int_0^t \|f(x,\tau)\|\, \|u_\tau(x,\tau)\| d\tau. \tag{7.5}$$

აქედან, ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის,

$$\Phi(t) \le \Phi(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|f(x,\tau)\|^2\, d\tau + \int_0^t \varepsilon \|u_\tau(x,\tau)\|^2\ d\tau. \tag{7.6}$$

(7.6)-ში დავუშვათ $\varepsilon = 1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ და გამოვიყენოთ (7.4) ფორმულა Gronwall-ის ლემასთან ერთად. მივიღებთ

$$\Phi(t) \le \Phi(0) + \frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\int_0^t \|f(x,\tau)\|^2\, d\tau + \int_0^t \left(\|u_\tau(x,\tau)\|^2 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \|u_\tau(x,\tau)\|^2\right) d\tau$$

$$\le \Phi(0) + \frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\int_0^t \|f(x,\tau)\|^2\, d\tau + \int_0^t (\|u_\tau(x,\tau)\|^2 + h\|u_{x\tau}(x,\tau)\|^2)\, d\tau$$

$$\le\ \Phi(0) + \frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\int_0^t \|f(x,\tau)\|^2\, d\tau + \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau \le \varkappa e^t, \tag{7.7}$$

სადაც

$$\varkappa =\ \Phi(0) + \frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\int_0^T \|f(x,t)\|^2\, dt. \tag{7.8}$$

ამ ფორმულაში დავითვალოთ $\Phi(0)$. (7.4)-ისა და (1.2)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Phi(0) = \|u^1(x)\|^2 + h\left\|u^{1'}(x)\right\|^2 + \left\|u^{0''}(x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda + \left\|u^{0'}(x)\right\|^2\right)^2 > 0. \tag{7.9}$$

(7.7)-ისა და (7.4)-ის გამოყენების შედეგად გვექნება

$$\|u_t(x,t)\|^2 + h\|u_{xt}(x,t)\|^2 + \|u_{xx}(x,t)\|^2 + \frac{1}{2}(\lambda + \|u_x(x,t)\|^2)^2 \le \varkappa e^t. \tag{7.10}$$

გამოვიყენოთ (7.10). თუ, გარდა ამისა გავითვალისწინებთ, რომ

$$\|u_{xx}(x,t)\| \geq \|\pi_n u_{xx}(x,t)\| \geq \frac{\pi}{L}\|\pi_n u_x(x,t)\|,$$

მივიღებთ (7.3)-ს $l = 1$-თვის, სადაც

$$c_{10}(t) = \left(\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + 2\lambda\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + 2\varkappa e^t\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leq (2\varkappa e^t)^{\frac{1}{2}} \tag{7.11}$$

და (7.3)-ს $l = 2$-თვის, სადაც

$$c_{11}(t) = (\varkappa e^t)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.12}$$

ლემა დამტკიცებულია.

7.2. მიახლოებითი ამონახსნის ნორმის შეფასება. შევაფასოთ მიახლოებითი ამონახსნის ნორმა.

ლ ე მ ა 7 . 2 . მართებულია უტოლობა

$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial x^l} u_n(x,t)\right\| \leq c_{1l+1}(t), \tag{7.13}$$

$$0 < t \leq T, \qquad l = 1, 2.$$

$c_{12}(t)$-ისა და $c_{13}(t)$-ის ფორმულები მოცემულია ქვემოთ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . გავამრავლოთ (4.2) განტოლება $Lu'_{ni}(t)$-ზე და ავჯამოთ მიღებული ტოლობა $i = 1, 2, \dots, n$-ის მიმართ.

(4.1)-ის გამოყენებით, შედეგი დაიწერება შემდეგი სახით

$$\Phi'_n(t) = L\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, u'_{ni}(t),$$

სადაც

$$\Phi_n(t) = \|u_{nt}(x,t)\|^2 + h\|u_{nxt}(x,t)\|^2 + \|u_{nxx}(x,t)\|^2 + \frac{1}{2}(\lambda + \|u_{nx}(x,t)\|^2)^2. \tag{7.14}$$

ამრიგად, როცა $0 < t \leq T$, გვაქვს

$$\Phi_n(t) = \Phi_n(0) + L\int_0^t \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau)\, u'_{ni}(\tau)d\tau \leq \Phi_n(0) + L\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} u'^2_{ni}(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

$$= \Phi_n(0) + 2\int_0^t \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n} u'^2_{ni}(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

$$= \Phi_n(0) + 2\int_0^t \|\pi_n f(x,\tau)\|\,\|u_{n\tau}(x,\tau)\| d\tau, \qquad (7.15)$$

სადაც

$$\pi_n f(x,\tau) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\,. \qquad (7.16)$$

თუ შევადარებთ (7.14)-ს, (7.15)-ს, (7.4)-სა და (7.5)-ს, შევნიშნავთ მსგავსებას. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია გავაგრძელოთ დამტკიცება წინა ლემის დამტკიცების მსგავსად. მივიღებთ

$$\Phi_n(t) \le \varkappa_n e^t, \qquad (7.17)$$

სადაც

$$\varkappa_n = \Phi_n(0) + \frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\int_0^T \|\pi_n f(x,t)\|^2\, dt. \qquad (7.18)$$

თუ გამოვიყენებთ (7.14)-სა და (7.17)-ს, (4.1)-დან გამომდინარე

$$\|u_{nxx}(x,t)\| \ge \frac{\pi}{L}\|u_{nx}(x,t)\|$$

უტოლობასთან ერთად, მივალთ დასკვნამდე, რომ (7.13) სრულდება $l = 1$-თვის, ამასთან, (7.11)-ის მსგავსად,

$$c_{12}(t) = \left(\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + 2\lambda\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + 2\varkappa_n e^t\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \le c_{10}(t)\,. \qquad (7.19)$$

გარდა ამისა, (7.14)-ისა და (7.17)-ის საფუძველზე ვასკვნით, რომ (7.13) სრულდება $l =$ 2-თვის. ამასთან, (7.12)-ის მსგავსად,

$$c_{13}(t) = (\varkappa_n e^t)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.20)$$

ლემა დამტკიცებულია.

7.3. $c_{1l}(t)$ პარამეტრების გამოთვლის შესახებ. შევჩერდეთ $c_{1l}(t)$, $l = 0, 1, 2, 3$, პარამეტრების გამოთვლის საკითხზე. მათგან პირველი ორის, $c_{10}(t)$-ისა და $c_{11}(t)$-ის, მისაღებად გამოვიყენებთ (7.11), (7.12) და (7.8), (7.9) ფორმულებს, ხოლო $c_{12}(t)$-ისა და $c_{13}(t)$-ის მისაღებად – (7.19), (7.20) და (7.18), (7.14) ფორმულებს.

გარდა ამისა, $\Phi_n(0)$ და $\|\pi_n f(x,t)\|$-თვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი დამოკიდებულებები

$$\Phi_{\mathrm{n}}(0)=\frac{L}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i^{1^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}u_i^{0^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i^{0^2}\right)^{2}\le\Phi(0),$$

$$\begin{aligned}\Phi_n(0)\le{}&\frac{L}{2}\sum_{l=0}^{1}\sum_{m=0}^{l}\omega_l h^{l(1-m)}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{4-2(l+m)}\left(1+\frac{1}{p_l+2m}\left(1-\frac{1}{n^{p_l+2m}}\right)\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2}\omega_0\sum_{l=0}^{1}\left(\frac{1}{p_0+2}\left(1-\frac{1}{n^{p_0+2}}\right)\right)^{l}\right)^{2},\end{aligned}\tag{7.21}$$

$$\|\pi_n f(x,t)\|^2=\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(t)\le\omega\frac{L}{2}\left(1+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{n^p}\right)\right).$$

(7.21) ფორმულები არის (7.14), (7.4), (4.1), (2.5), (2.8), (3.2), (7.16), (3.3) გამოსახულებებისა და მწკრივების კრებადობის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენების შედეგი.

7.4. რამდენიმე დამხმარე უტოლობა. შემოვიღოთ პარამეტრი

$$\alpha_0=\left(\frac{1}{1+(h\lambda)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{7.22}$$

ლ ე მ ა 7 . 3 . სრულდება შეფასებები

$$|(\|\pi_n u_x(x,t)\|^2)_t|\le(\alpha_0 c_{11}(t))^2,\tag{7.23}$$

$$|(\|u_{nx}(x,t)\|^2)_t|\le(\alpha_0 c_{13}(t))^2.\tag{7.24}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . თუ გამოვიყენებთ (7.2), (7.4), (7.7), (7.12) და (7.22) გამოსახულებებს, დავასკვნით

$$|(\|\pi_n u_x(x,t)\|^2)_t|=L\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i(t)u_i'(t)\right|=\alpha_0^2L\left|\sum_{i=1}^{n}\left(1+(h\lambda)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i(t)u_i'(t)\right|$$

$$=\alpha_0^2L\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i(t)u_i'(t)+\sum_{i=1}^{n}(h\lambda)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i(t)u_i'(t)\right|$$

$$\le\alpha_0^2L\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}|u_i(t)||u_i'(t)|+\sum_{i=1}^{n}(h\lambda)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}|u_i(t)||u_i'(t)|\right)$$

$$\le\alpha_0^2L\left(\frac{L}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i'^2(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}u_i^2(t)\right)\right)+\frac{L}{2}\left(h\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i'^2(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i^2(t)\right)$$

$$\le\alpha_0^2\frac{L}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_i'^2(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}u_i^2(t)+h\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i'^2(t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}u_i^2(t)\right)$$

$$=\alpha_0^2(\|u_t(x,t)\|^2+h\|u_{xt}(x,t)\|^2+\|u_{xx}(x,t)\|^2+\lambda\|u_x(x,t)\|^2)\le\alpha_0^2\Phi(t)\le\ \alpha_0^2c_{11}^2(t).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (7.23) მართებულია. მსგავსად (4.1)-ისა, (7.14)-ის, (7.17)-ისა და (7.20)-ის თანახმად,

$$|(\|u_{nx}(x,t)\|^2)_t| \leq \alpha_0^2 \Phi_n(t) \leq \alpha_0^2 c_{13}^2(t).$$

მაშასადამე, სრულდება (7.24) უტოლობაც.

ლემა დამტკიცებულია.

შევცვალოთ (7.24) შეფასების მარჯვენა მხარე გამოსახულებით, რომელიც არაა დამოკიდებული n-ზე. (7.20), (7.18) და (7.12), (7.8) ფორმულების გამოყენების შედეგად მიიღება უტოლობა

$$|(\|u_{nx}(x,t)\|^2)_t| \leq (\alpha_0 c_{11}(t))^2. \tag{7.25}$$

ლ ე მ ა 7 . 4 . მართებულია შეფასება

$$\left(\sum_{l=1}^{2} \lambda^{2-l} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{2l}\right) \|\Delta u_n(x,t)\|^2$$

$$\leq \|\Delta u_{nt}(x,t)\|^2 + h\|\Delta u_{nxt}(x,t)\|^2 + \|\Delta u_{nxx}(x,t)\|^2 + \lambda\|\Delta u_{nx}(x,t)\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{2} \left(\psi_n + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2 \int_0^T \frac{1}{c_{11}^2(t)} \|\Delta_n f(x,t)\|^2 dt\right)^s r_s(t), \tag{7.26}$$

$$0 < t \leq \mathrm{T},$$

სადაც

$$r_s(t) = \rho_s e^{\theta_s(t)},$$

$$\rho_1 = 2, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 \int_0^T \frac{c_{11}^2(t)}{c_{11}^2(t) + c_{13}^2(t)} r_1^2(t)dt,$$

$$\psi_n = \|\Delta_n u^1(x)\|^2 + \left\|\Delta_n u^{1'}(x)\right\|^2 + \left\|\Delta_n u^{0''}(x)\right\|^2 + \left(\lambda + \left\|u^{0'}(x)\right\|^2\right)\left\|\Delta_n u^{0'}(x)\right\|^2, \tag{7.27}$$

$$\theta_1(t) = \int_0^t c_{11}^2(\tau)d\tau,$$

$$\theta_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left((\alpha_0\alpha_1)^2\left(c_{11}^2(\tau) + c_{13}^2(\tau)\right) + \alpha_1\alpha_2\left(c_{10}(\tau) + c_{12}(\tau)\right)\left(c_{11}(\tau) + c_{13}(\tau)\right)\right)d\tau,$$

$$\Delta_n u^l(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i^l \sin\frac{i\pi x}{L}, \;\; l = 0, 1, \quad \Delta_n f(x,t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L},$$

$$\alpha_0 = \left(\frac{1}{1 + (h\lambda)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \alpha_1 = \frac{L}{\pi}\left(\frac{1}{1 + \lambda\left(\frac{L}{\pi}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \alpha_2 = \left(\frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.28}$$

ხოლო $c_{1k}(t)$, $k = 0, 1, 2, 3,$ პარამეტრების გამოთვლის წესი აღწერილია 7.3 პუნქტში.

(3.2), (3.3) პირობების შესრულების შემთხვევაში ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left(\sum_{l=1}^{2} \lambda^{2-l}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2l}\right)\|\Delta u_n(x,t)\|^2$$

$$\leq \|\Delta u_{nt}(x,t)\|^2 + h\|\Delta u_{nxt}(x,t)\|^2 + \|\Delta u_{nxx}(x,t)\|^2 + \lambda\|\Delta u_{nx}(x,t)\|^2$$

$$\leq \frac{L}{2}\sum_{s=1}^{2}\left(\sum_{k=0}^{1}\left(\omega_0\frac{1}{p_0+2k}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2(2-k)}\left(\lambda+\left\|u^{0\prime}(x)\right\|^2\right)^k\frac{1}{n^{p_0+2k}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\omega_1\frac{1}{p_1+2k}\left(h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)^{1-k}\frac{1}{n^{p_1+2k}}\right)+\omega\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2\int_0^T\frac{1}{c_1^2(t)}dt\frac{1}{n^p}\right)^s r_s(t), \quad (7.29)$$

$$0 < t \leq \mathrm{T}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (7.29)-ის მარცხენა უტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს (7.1), (4.1) და (2.5) ფორმულებიდან.

დავამტკიცოთ (7.29)-ის მარჯვენა უტოლობა. წარმოვადგინოთ ცდომილება (7.1) შემდეგი ჯამის სახით

$$u_n(x,t) - u(x,t) = \delta_n u(x,t) + \gamma_n u(x,t), \quad (7.30)$$

სადაც

$$\delta_n u(x,t) = u_n(x,t) - \pi_n u(x,t), \qquad \gamma_n u(x,t) = \pi_n u(x,t) - u(x,t). \quad (7.31)$$

(7.30)-ის პირველი შესაკრები წარმოადგენს ცდომილების მთავარ ნაწილს, ხოლო მეორე – ზუსტი ამონახსნის ნაშთით წევრს.

თეორემის დასამტკიცებლად გვჭირდება $\delta_n u(x,t)$ და $\gamma_n u(x,t)$ ფუნქციების ნორმების შეფასებები.

(4.1)-ისა და (7.2)-ის თანახმად,

$$\delta_n u(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\delta_{ni}(t)\sin\frac{i\pi x}{L}, \quad (7.32)$$

სადაც $\delta_{ni}(t) = u_{ni}(t) - u_i(t)$.

განვიხილოთ (2.7) სისტემის პირველი n განტოლება და პირველი n ტოლობა თითოეული (2.8) საწყისი პირობებიდან. გამოვაკლოთ ისინი (4.2) სისტემის განტოლებებს და (4.3)-ის საწყის პირობებს. მივიღებთ განტოლებათა სისტემას და საწყის პირობებს $\delta_{ni}(t)$-თვის, $i = 1, 2, \dots, n$. (7.32) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება სისტემა

$$\left(\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\delta''_{ni}(t)+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\delta_{ni}(t)\right)$$

$$+\frac{L}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(u_{nj}(t)+u_j(t)\right)\delta_{nj}\right)\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(u_{ni}(t)+u_i(t)\right)\right)$$

$$+\left(\lambda+\frac{L}{2}\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u^2{}_{nj}(t)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u^2{}_j(t)}{2}\right)\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\delta_{ni}(t)$$

$$-\frac{L}{2}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u^2{}_j(t)\right)\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2u_i(t)=0,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{7.33}$$

საწყისი პირობებით

$$\delta_{ni}(0)=0,\quad \delta'_{ni}(0)=\ 0,\qquad i=1,2,\dots,n. \tag{7.34}$$

გავამრავლოთ (7.33) გამოსახულება $L\delta'_{ni}(t)$-ზე და მიღებული ტოლობა ავჯამოთ $i=1,2,\dots,n$-ის მიმართ. მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{L}{2}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\delta'^2_{ni}(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{L}{2}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\delta^2_{ni}(t)\right)$$

$$+\left(\frac{L}{2}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(u_{nj}(t)+u_j(t)\right)\delta_{nj}(t)\right)\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(u_{ni}(t)+u_i(t)\right)\delta'_{ni}(t)\right.$$

$$\left.+\left[\lambda+\frac{L}{2}\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u^2{}_{nj}(t)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u^2{}_j(t)}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{L}{2}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\delta^2_{ni}(t)\right)\right)\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{L}{2}\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u^2{}_j(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}L\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2u_i(t)\delta'_{ni}(t)\right).$$

ამრიგად, თუ გამოვიყენებთ (7.31)-ს, (7.2)-ს, (2.5)-ს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ, (2.5)-ის გამო

$$\gamma_n u(x,t)=-\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i\sin\frac{i\pi x}{L}, \tag{7.35}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$e'_n(t)=\frac{L}{2}\left(\|\pi_n u_x(x,t)\|^2-\|u_{nx}(x,t)\|^2\right)$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(u_{ni}(t) + u_i(t)\right)\delta'_{ni}(t) + \frac{1}{2}(\|u_{nx}(x,t)\|^2 + \|u_x(x,t)\|^2)'$$

$$\times \|\delta_n u_x(x,t)\|^2 + L\|\gamma_n u_x(x,t)\|^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i(t)\delta'_{ni}(t), \qquad (7.36)$$

სადაც

$$e_n(t) = \|\delta_n u_t(x,t)\|^2 + h\|\delta_n u_{xt}(x,t)\|^2 + \|\delta_n u_{xx}(x,t)\|^2$$
$$+ \left(\lambda + \frac{(\|u_{nx}(x,t)\|^2 + \|u_x(x,t)\|^2)}{2}\right)\|\delta_n u_x(x,t)\|^2. \qquad (7.37)$$

შევაფასოთ (7.36)-ის მარჯვენა მხარე. ამისათვის დაგვჭირდება (4.1), (7.2), (7.28), (7.30), (7.31), (7.35) განსაზღვრებები, (7.35) ფორმულა და (7.3), (7.13), (7.23), (7.24) შეფასებები.

მართებულია

$$\left|\|\pi_n u_x(x,t)\|^2 - \|u_{nx}(x,t)\|^2\right| = \frac{L}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i^2(t) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_{ni}^2(t)\right|$$
$$\le \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left|u_i^2(t) - u_{ni}^2(t)\right|$$
$$\le \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(u_i(t) - u_{ni}(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(u_i(t) + u_{ni}(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left\|\left(\pi_n u(x,t) - u_n(x,t)\right)_x\right\| \left\|\left(\pi_n u(x,t) + u_n(x,t)\right)_x\right\|$$
$$\le (\|\pi_n u_x(x,t)\| + \|u_{nx}(x,t)\|)\|\delta_n u_x(x,t)\| \le \left(c_{10}(t) + c_{12}(t)\right)\|\delta_n u_x(x,t)\|$$
$$\le \left(\frac{\left(\frac{L}{\pi}\right)^2}{1 + \lambda\left(\frac{L}{\pi}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c_{10}(t) + c_{12}(t)\right)(\lambda\|\delta_n u_x(x,t)\|^2 + \|\delta_n u_{xx}(x,t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

და

$$\frac{L}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(\beta u_{ni}(t) + u_i(t)\right)\delta'_{ni}(t)\right| \le \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \left(\beta u_{ni}(t) + u_i(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta'^2_{ni}(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|\pi_n u_{xx}(x,t) + \beta u_{nxx}(x,t)\|\|\delta_n u_t(x,t)\| \le (\|\pi_n u_{xx}(x,t)\| + \beta\|u_{nxx}(x,t)\|)\|\delta_n u_t(x,t)\|$$
$$\le \left(c_{11}(t) + \beta c_{13}(t)\right)\|\delta_n u_t(x,t)\| \le \left(c_{11}(t) + \beta c_{13}(t)\right)$$
$$\times \left(\frac{1}{1 + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}(\|\delta_n u_t(x,t)\|^2 + h\|\delta_n u_{xt}(x,t)\|^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

სადაც $\beta = 0$ ან $\beta = 1$. ამის გამო

$$\frac{L}{2}\left|(\|\pi_n u_x(x,t)\|^2-\|u_{nx}(x,t)\|^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\big(u_{ni}(t)+u_i(t)\big)\,\delta'_{ni}(t)\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\big(c_{10}(t)+c_{12}(t)\big)\big(c_{11}(t)+c_{13}(t)\big)$$

$$\times(\|\delta_n u_t(x,t)\|^2+h\|\delta_n u_{xt}(x,t)\|^2+\|\delta_n u_{xx}(x,t)\|^2+\lambda\|\delta_n u_x(x,t)\|^2)$$

$$\leq\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\big(c_{10}(t)+c_{12}(t)\big)\big(c_{11}(t)+c_{13}(t)\big)e_n(t). \qquad (7.38)$$

გარდა ამისა,

$$\frac{1}{2}|(\|u_{nx}(x,t)\|^2+\|u_x(x,t)\|^2)'|\|\delta_n u_x(x,t)\|^2\leq\frac{1}{2}\alpha_0^2\big(c_{11}^2(t)+c_{13}^2(t)\big)\|\delta_n u_x(x,t)\|^2$$

$$\leq\frac{1}{2}(\alpha_0\alpha_1)^2\big(c_{11}^2(t)+c_{13}^2(t)\big)(\|\delta_n u_{xx}(x,t)\|^2+\lambda\|\delta_n u_x(x,t)\|^2)$$

და

$$\frac{L}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i(t)\delta'_{ni}(t)\right|\leq\alpha_2 c_{11}(t)(\|\delta_n u_t(x,t)\|^2+h\|\delta_n u_{xt}(x,t)\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\frac{1}{2}|(\|u_{nx}(x,t)\|^2+\|u_x(x,t)\|^2)'|\|\delta_n u_x(x,t)\|^2+\frac{L}{2}\|\gamma_n u_x(x,t)\|^2\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i(t)\delta'_{ni}(t)\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}(\alpha_0\alpha_1)^2\big(c_{11}^2(t)+c_{13}^2(t)\big)$$

$$\times(\|\delta_n u_t(x,t)\|^2+h\|\delta_n u_{xt}(x,t)\|^2+\|\delta_n u_{xx}(x,t)\|^2+\lambda\|\delta_n u_x(x,t)\|^2)$$

$$+\frac{\alpha_2^2 c_{11}^2(t)}{2(\alpha_0\alpha_1)^2\big(c_{11}^2(t)+c_{13}^2(t)\big)}\|\gamma_n u_x(x,t)\|^4$$

$$\leq\frac{1}{2(\alpha_0\alpha_1)^2}\alpha_2^2\frac{c_{11}^2(t)}{c_{11}^2(t)+c_{13}^2(t)}\|\gamma_n u_x(x,t)\|^4+\frac{1}{2}(\alpha_0\alpha_1)^2\big(c_{11}^2(t)+c_{13}^2(t)\big)e_n(t). \quad (7.39)$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (7.36)-(7.39) შეფასებებს და (7.37), (7.32), (7.34)-დან გამომდინარე $e_n(0)=0$ ტოლობას, მივიღებთ

$$e_n(t)\leq\left(\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2\int_0^t\frac{c_{11}^2(\tau)}{c_{11}^2(\tau)+c_{13}^2(\tau)}\right)\|\gamma_n u_x(x,t)\|^4 d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_1\int_0^t\Big(\alpha_0^2\alpha_1\big(c_{11}^2(\tau)+c_{13}^2(\tau)\big)+\alpha_2\big(c_{10}(\tau)+c_{12}(\tau)\big)\big(c_{11}(\tau)+c_{13}(\tau)\big)\Big)e_n(\tau)d\tau.$$

თუ გავითვალისწინებთ გრონვუოლის (Gronwall) ლემას, (7.27) განსაზღვრებებს და $\|\gamma_n u_{xx}(x,t)\|\geq\frac{\pi}{L}\|\gamma_n u_x(x,t)\|$ გამოსახულებიდან გამომდინარე უტოლობას

$$\|\gamma_n u_x(x,t)\|^2\leq\alpha_1^2(\|\gamma_n u_{xx}(x,t)\|^2+\lambda\|\gamma_n u_x(x,t)\|^2), \qquad (7.40)$$

მივიღებთ

$$e_n(t) \le \left(\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 \int_0^T \frac{c_{11}^2(t)}{c_{11}^2(t) + c_{13}^2(t)} (\|\gamma_n u_{xx}(x,t)\|^2 + \lambda \|\gamma_n u_x(x,t)\|^2)^2 dt \right)$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{2} \alpha_1 \int_0^t \left(\alpha_0^2 \alpha_1 \left(c_{11}^2(\tau) + c_{13}^2(\tau)\right) + \alpha_2 \left(c_{10}(\tau) + c_{12}(\tau)\right)\left(c_{11}(\tau) + c_{13}(\tau)\right) \right) d\tau \right). \quad (7.41)$$

გავამრავლოთ (2.7) განტოლება $Lu_i'(t)$-ზე და ავჯამოთ მიღებული ტოლობა $i = n + 1, n + 2, \dots$-ის მიმართ. მივიღებთ

$$L\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right) u_i''(t) u_i'(t) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i(t) u_i'(t) \right.$$

$$\left. + \left(\lambda + \frac{L}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 u_j^2(t)\right) \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i(t) u_i'(t) \right) = L \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(t)\, u_i'(t)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{L}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i'^2(t) + h \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i'^2(t) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 u_i^2(t) \right) \right.$$

$$\left. + \left(\lambda + \frac{L}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 u_j^2(t)\right) \frac{d}{dt} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 u_i^2(t) \right) = L \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(t)\, u_i'(t)\,.$$

(7.35)-ის გამო,

$$\frac{d}{dt} (\|\gamma_n u_t(x,t)\|^2 + h\|\gamma_n u_{xt}(x,t)\|^2 + \|\gamma_n u_{xx}(x,t)\|^2)$$

$$+ (\lambda + \|u_x(x,t)\|^2) \frac{d}{dt} \|\gamma_n u_x(x,t)\|^2 = L \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(t)\, u_i'(t)\,.$$

ამრიგად,

$$s_n'(t) = \|\gamma_n u_x(x,t)\|^2 \frac{d}{dt} \|u_x(x,t)\|^2 + L \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(t)\, u_i'(t), \quad (7.42)$$

სადაც

$$s_n(t) = \|\gamma_n u_t(x,t)\|^2 + h\|\gamma_n u_{xt}(x,t)\|^2 + \|\gamma_n u_{xx}(x,t)\|^2$$

$$+ (\lambda + \|u_x(x,t)\|^2) \|\gamma_n u_x(x,t)\|^2. \quad (7.43)$$

(7.42), (7.35) და (7.27), (7.25) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს

$$s_n(t) = s_n(0) + \int_0^t s_n'(\tau)d\tau \le s_n(0)$$

$$+ \int_0^t \left(|(\|u_x(x,\tau)\|)_\tau| \|\gamma_n u_x(x,\tau)\|^2 + 2\left(\frac{L}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i'^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} \right) d\tau$$

$$= s_n(0) + \int_0^t \left(|(\|u_x(x,\tau)\|)_\tau| \|\gamma_n u_x(x,\tau)\|^2 + 2\|\gamma_n f(x,\tau)\| \|\gamma_n u_\tau(x,\tau)\|\right) d\tau$$

$$\le s_n(0) + \int_0^t (\alpha_0 c_{11}(t))^2 \|\Delta_n u_x(x,\tau)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\Delta_n f(x,\tau)\|^2 + \varepsilon\|\gamma_n u_\tau(x,\tau)\|^2\, d\tau,$$

სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. გამოვიყენოთ (7.40) უტოლობები და გამოსახულება

$$\|\gamma_n u_\tau(x,\tau)\|^2 \le \alpha_2^2(\|\gamma_n u_\tau(x,\tau)\|^2 + h\|\gamma_n u_{x\tau}(x,\tau)\|^2),$$

რომელიც, თავის მხრივ, გამომდინარეობს

$$\|\gamma_n u_{x\tau}(x,\tau)\| \ge \frac{\pi}{L}\|\gamma_n u_\tau(x,\tau)\|$$

უტოლობიდან. დავუშვათ,

$$\varepsilon = \left(\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 c_{11}^2(\tau)$$

და მხედველობაში მივიღოთ (7.43). გვექნება

$$s_n(t) \le s_n(0) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2 \int_0^t \frac{1}{c_{11}^2(\tau)}\|\Delta_n f(x,\tau)\|^2 d\tau$$

$$+(\alpha_0\alpha_1)^2 \int_0^t c_{11}^2(\tau)(\|\gamma_n u_\tau(x,\tau)\|^2 + h\|\gamma_n u_{x\tau}(x,\tau)\|^2 + \|\gamma_n u_{xx}(x,\tau)\|^2$$

$$+ \lambda\|\gamma_n u_x(x,\tau)\|^2)\, d\tau$$

$$\le s_n(0) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2 \int_0^t \frac{1}{c_{11}^2(\tau)}\|\Delta_n f(x,\tau)\|^2 d\tau + (\alpha_0\alpha_1)^2 \int_0^t c_{11}^2(\tau) s_n(\tau) d\tau.$$

გრონუოლის (Gronwall) ლემის თანახმად,

$$s_n(t) \le \left(s_n(0) + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2 \int_0^t \frac{1}{c_{11}^2(\tau)}\|\Delta_n f(x,\tau)\|^2 d\tau \right) exp\left((\alpha_0\alpha_1)^2 \int_0^t c_{11}^2(\tau)\, d\tau \right). \quad (7.44)$$

(7.43), (7.35), (4.3) და (7.27), (7.28) გამოსახულებების გამოყენების შედეგად, (7.44) გადაიწერება შემდეგნაირად

$$s_n(t) \le \left(\Psi_n + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2 \int_0^T \frac{1}{c_{11}^2(t)} \|\Delta_n f(x,t)\|^2 dt\right) e^{\theta_3(t)}, \tag{7.45}$$

სადაც

$$\theta_3(t) = (\alpha_0\alpha_1)^2 \int_0^t c_{11}^2(\tau) d\tau.$$

(7.30), (7.37) და (7.43) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(u_n(x,t) - u(x,t)\right)_t\right\|^2 + h\left\|\left(u_n(x,t) - u(x,t)\right)_{xt}\right\|^2 \\
&\qquad + \left\|\left(u_n(x,t) - u(x,t)\right)_{xx}\right\|^2 + \lambda\left\|\left(u_n(x,t) - u(x,t)\right)_x\right\|^2 \\
&\le 2(\|\delta_n u_t(x,t)\|^2 + \|\gamma_n u_t(x,t)\|^2) + h(\|\delta_n u_{xt}(x,t)\|^2 + \|\gamma_n u_{xt}(x,t)\|^2) \\
&\quad + (\|\delta_n u_{xx}(x,t)\|^2 + \|\gamma_n u_{xx}(x,t)\|^2) + \lambda(\|\delta_n u_x(x,t)\|^2 + \|\gamma_n u_x(x,t)\|^2) \\
&\le 2\left(e_n(t) + s_n(t)\right).
\end{aligned} \tag{7.46}$$

(7.41)-ისა და (7.43)-ის საფუძველზე,

$$e_n(t) \le \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 \left(\int_0^T \frac{c_{11}^2(t)}{c_{11}^2(t) + c_{13}^2(t)} s_n^2(t) dt\right) e^{\theta_2(t)}. \tag{7.47}$$

(7.46)-ისა და (7.45)-ის (7.47)-ში გამოყენებისა და (7.1)-ის გათვალისწინების შედეგად, მიიღება (7.26)-ის მარჯვენა შეფასება.

(7.29) შეფასება წარმოადგენს (7.26) შეფასების კერძო შემთხვევას. ამის დასამტკიცებლად, (3.2), (3.3) პირობების გარდა, დაგვჭირდება გამოსახულება

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha+1} \le \int_n^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0. \tag{7.48}$$

ამის დასამტკიცებლად ჯერ დავწეროთ ტოლობა

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha+1} = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}$$

და, ბოლოს, მწკრივების კრებადობის ინტეგრალური ნიშნის საფუძველზე გამოვიყენოთ შეფასება

$$\sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha+1} \le \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} + \int_n^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} dx.$$

ახლა გამოვიყენოთ (3.2), (3.3), (7.48) და (7.27), (7.28) განსაზღვრებები Ψ_n-ისა და $\|\Delta_n f(x,t)\|^2$-თვის შეფასებების მისაღებად. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Psi_n = \frac{L}{2}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)(u_i^1)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 (u_i^0)^2\right.$$
$$\left. + \left(\lambda + \|u^{0\prime}(x)\|^2\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 (u_i^0)^2\right)$$
$$\le \frac{L}{2}\left(\omega_1 \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{i^{p_1+3}} + h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{i^{p_1+1}}\right) + \omega_0\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^{p_0+1}}\right.$$
$$\left. + \omega_0\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\lambda + \|u^{0\prime}(x)\|^2\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^{p_0+3}}\right)$$
$$\le \frac{L}{2}\left(\frac{\omega_1}{p_1+2}\frac{1}{n^{p_1+2}} + \frac{\omega_1}{p_1}h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\frac{1}{n^{p_1}} + \frac{\omega_0}{p_0+2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\frac{1}{n^{p_0}} + \frac{\omega_0}{p_0+2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\lambda + \|u^{0\prime}(x)\|^2\right)\frac{1}{n^{p_0+2}}\right)$$
$$= \frac{L}{2}\left(\sum_{s=0}^{1}\omega_s\sum_{r=0}^{1}\frac{1}{p_s+2r}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{4-2(r+s)} h^{(1-r)s}\left(\lambda + \|u^{0\prime}(x)\|^2\right)^{(1-s)r}\frac{1}{n^{p_s+2r}}\right) \quad (7.49)$$

და

$$\|\Delta_n f(x,t)\|^2 = \frac{L}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i^2(t) \le \frac{L}{2}\omega\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^{p+1}} \le \frac{L}{2}\frac{\omega}{p}\frac{1}{n^p}. \quad (7.50)$$

(7.49)-ისა და (7.50)-ის (7.26)-ში გამოყენების შედეგად მიიღება (7.29) შეფასება.

დამტკიცების დასასრულს შევნიშნოთ, რომ (3.2) და (3.3) პირობის შესრულება არ არის აუცილებელი. (7.26)-დან შესაძლებელია გალიორკინის მეთოდის ცდომილების შეფასება იმ შემთხვევებში, როცა u_i^l, $l = 0,1$, $f_i(t)$ კოეფიციენტების, $i = 1,2,\ldots$, ცვლილების წესი არ შეესაბამება (3.2)-სა და (3.3)-ს.

ლემა დამტკიცებულია.

7.5. გალიორკინის მეთოდის ცდომილების შეფასება. ჩამოვაყალიბოთ დებულება გალიორკინის მეთოდის სიზუსტის შესახებ.

გავიხსენოთ ცდომილების (7.1) განსაზღვრება. შემოვიღოთ პარამეტრი

$$c_1 = c_{14}c_{15}c_{16}, \quad (7.51)$$

სადაც

$$c_{14}=\left(\left(\lambda+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$c_{15}=\max\left(1,\lambda+\left\|u^{0\prime}(x)\right\|^2,\left((\alpha_0\alpha_1)^2\int_0^T\|f(x,t)\|^2\,dt\right)^{-1}\right),$$

$$c_{16}=\max^{\frac{1}{2}}(c_{17},c_{18}),\quad c_{17}=2\exp\big(\varkappa(e^T-1)\big), \tag{7.52}$$

$$c_{18}=\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 T\exp\big(\varkappa c_{19}(e^T-1)\big),$$

$$c_{19}=\left(2+2(2)^{\frac{1}{2}}\alpha_1\alpha_2+(\alpha_0\alpha_1)^2\right).$$

თეორემა 7.1. გალიორკინის მეთოდის ცდომილებისთვის მართებულია შეფასება

$$\|\Delta u_n(x,t)\|=\|u_n(x,t)-u(x,t)\|$$

$$\leq c_1\sum_{p=1}^{2}\left(\sum_{q=0}^{1}\sum_{r=1}^{2}\left\|\frac{d^{r-q}\Delta_n u^q(x)}{dx^{r-q}}\right\|^p+\left(\int_0^T\|\Delta_n f(x,t)\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right). \tag{7.53}$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ლემა 7.4 და c_{14} პარამეტრის (7.52) განსაზღვრება. (7.26) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს

$$\|\Delta u_n(x,t)\|^2\leq c_{14}^2\max\big(r_1(t),r_2(t)\big)\sum_{s=1}^{2}A^s, \tag{7.54}$$

სადაც

$$A=\psi_n+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0\alpha_1}\right)^2\int_0^T\frac{1}{c_{11}^2(t)}\|\Delta_n f(x,t)\|^2\,dt.$$

ვინაიდან, (7.27) ტოლობის თანახმად,

$$\psi_n\leq\max\left(1,\lambda+\left\|u^{0\prime}(x)\right\|^2\right)\left(\|\Delta_n u^1(x)\|^2+\left\|\Delta_n u^{1\prime}(x)\right\|^2+\left\|\Delta_n u^{0\prime}(x)\right\|^2+\left\|\Delta_n u^{0\prime\prime}(x)\right\|^2\right),$$

ხოლო (7.12), (7.8) და (7.28) გამოსახულებების ძალით

$$(\alpha_2)^2\frac{1}{c_{11}^2(t)}\leq\left(\int_0^T\|f(x,t)\|^2\,dt\right)^{-1},$$

ამიტომ c_{15} პარამეტრის (7.52) განსაზღვრების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$A \le c_{15}^2\left(\|\Delta_n u^1(x)\|^2 + \left\|\Delta_n u^{1'}(x)\right\|^2 + \left\|\Delta_n u^{0'}(x)\right\|^2 + \left\|\Delta_n u^{0''}(x)\right\|^2 + \int_0^T \|\Delta_n f(x,t)\|^2\, dt\right). \quad (7.55)$$

ახლა შევაფასოთ $\max\left(r_1(t), r_2(t)\right)$. (7.8), (7.11), (7.12) და (7.18)-(7.20) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$c_{10} \le (2\varkappa e^t)^{\frac{1}{2}}, \quad c_{11} = (\varkappa e^t)^{\frac{1}{2}}, \quad c_{12} \le c_{10} \le (2\varkappa e^t)^{\frac{1}{2}}, \quad c_{13} \le c_{11} \le (\varkappa e^t)^{\frac{1}{2}}.$$

გამოვიყენოთ ეს გამოსახულებები $\theta_1(t)$ და $\theta_2(t)$ პარამეტრებისთვის (7.27) მოცემულ ფორმულებში. მივიღებთ

$$\theta_1(t) \le \varkappa \int_0^t e^\tau\, d\tau = \varkappa(e^t - 1),$$

$$\theta_2(t) \le \frac{1}{2}\varkappa\left(2(\alpha_0\alpha_1)^2 + 4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\alpha_1\alpha_2\right)\int_0^t e^\tau\, d\tau = \varkappa\left((\alpha_0\alpha_1)^2 + 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\alpha_1\alpha_2\right)(e^t - 1),$$

ეს გამოსახულებები გამოვიყენოთ $r_1(t)$ და $r_2(t)$ პარამეტრებისთვის (7.27) მოცემულ ფორმულებში, მივიღებთ

$$r_1(t) = \rho_1 e^{\theta_1(t)} \le 2\exp\left(\varkappa(e^T - 1)\right),$$

$$r_2(t) = \rho_2 e^{\theta_2(t)} = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 \int_0^T r_1^2(t)\, dt\right) e^{\theta_2(t)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 r_1^2(T)Te^{\theta_2(t)}$$

$$\le \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2 T\exp\left(\varkappa\left(2 + 2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_0\alpha_1)^2\right)(e^T - 1)\right).$$

ამრიგად, (7.52)-ის თანახმად,

$$\max\left(r_1(t), r_2(t)\right) \le c_{16}^2.$$

(7.55) გამოსახულებისა და პარამეტრის განსაზღვრებიდან გამომდინარე $c_{15} \ge 1$ უტოლობის ძალით

$$\left(\sum_{s=1}^2 A^s\right)^{\frac{1}{2}} \le A^{\frac{1}{2}} + A$$

$$\le c_{15}\sum_{p=1}^2\left(\|\Delta_n u^1(x)\|^p + \left\|\Delta_n u^{1'}(x)\right\|^p + \left\|\Delta_n u^{0'}(x)\right\|^p + \left\|\Delta_n u^{0''}(x)\right\|^p\right.$$

$$
+\left(\int_0^T \|\Delta_n f(x,t)\|^2\,dt\right)^{\frac{p}{2}}\Bigg). \qquad (7.57)
$$

(7.54) უტოლობისა და (7.56), (7.57) გამოსახულებების საფუძველზე მიიღება დასამტკიცებელი შეფასება (7.53), რომლის c_1 კოეფიციენტი განისაზღვრება (7.51) ტოლობის თანახმად.

თეორემა დამტკიცებულია.

8. სხვაობიანი სქემის სიზუსტე. (5.1), (5.2) სხვაობიანი სქემის ცდომილება t_m კვანძში განვსაზღვროთ, როგორც სხვაობა (5.4) და (4.1) ფუნქციებს შორის, როცა $t = t_m$,

$$
\Delta u_n^m(x) = u_n^m(x) - u_n(x, t_m). \qquad (8.1)
$$

მაშასადამე,

$$
\Delta u_n^m(x) = \sum_{i=1}^n u_{ni}^m\,(t) \sin\frac{i\pi x}{L} - \sum_{i=1}^n u_{ni}\,(t_m) \sin\frac{i\pi x}{L}\,.
$$

კოეფიციენტებს შორის სხვაობა აღვნიშნოთ Δu_{ni}^m სიმბოლოთი, ანუ

$$
\Delta u_{ni}^m = u_{ni}^m - u_{ni}(t_m).
$$

8.1. განტოლებათა სისტემა ცდომილებისათვის. გამოვიყენოთ

$$
u_{ni}^m = \Delta u_{ni}^m + u_{ni}(t_m)
$$

ტოლობა (5.1) ფორმულაში. მივიღებთ

$$
\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{\Delta u_{ni}^{m+1} - 2\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau^2} + \Bigg\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\Bigg[\lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1}^n \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2
$$

$$
\times\left(\sum_{l=0}^1 \frac{\left(u_{nj}(t_{m+l}) + u_{nj}(t_{m+l-1})\right)^2 + \left(\Delta u_{nj}^{m+l} + \Delta u_{nj}^{m+l-1}\right)\left(2\left(u_{nj}(t_{m+l}) + u_{nj}(t_{m+l-1})\right) + \left(\Delta u_{nj}^{m+l} + \Delta u_{nj}^{m+l-1}\right)^2\right)}{4}\right)\Bigg]\Bigg\}
$$

$$
\times\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + 2u_{ni}(t_m) + u_{ni}(t_{m-1}) + (\Delta u_{ni}^{m+1} + 2\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1})}{4}
$$

$$
= -\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{u_{ni}(t_{m+1}) - 2u_{ni}(t_m) + u_{ni}(t_{m-1})}{\tau^2} + f_i^m,
$$

$$
m = 1,2,\dots,M-1.
$$

აქედან და (4.3), (5.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$
\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{\Delta u_{ni}^{m+1} - 2\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau^2}
$$

$$+\left(\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\lambda\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{\Delta u_{ni}^{m+1}+2\Delta u_{ni}^m+\Delta u_{ni}^{m-1}}{4}+r_{ni}^m=\psi_{ni}^m, \qquad (8.2)$$

$$m=1,2,\dots,M-1,$$

$$\Delta u_{ni}^0=0,\quad \frac{\Delta u_{ni}^1-\Delta u_{ni}^0}{\tau}=\psi_{ni}^0, \qquad (8.3)$$

სადაც

$$r_{ni}^m=\frac{L}{4}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(\left(\frac{u_{nj}(t_{m+1})+u_{nj}(t_m)}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right)^2\right)\frac{(\Delta u_{ni}^{m+1}+2\Delta u_{ni}^m+\Delta u_{ni}^{m-1})}{4}$$

$$+\frac{L}{4}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{nj}^{m+1}+u_{nj}^m}{2}+\frac{u_{nj}(t_{m+1})+u_{nj}(t_m)}{2}\right)\frac{\Delta u_{nj}^{m+1}+\Delta u_{nj}^m}{2}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{nj}^m+u_{nj}^{m-1}}{2}+\frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right)\frac{\Delta u_{nj}^m+\Delta u_{nj}^{m-1}}{2}\right)\frac{u_{ni}^{m+1}+2u_{ni}^m+u_{ni}^{m-1}}{4},$$

ხოლო ψ_{ni}^m არის (5.1) განტოლების აპროქსიმაციის ცდომილება, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\psi_{ni}^m=\left\{\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{u_{ni}(t_{m+1})-2u_{ni}(t_m)+u_{ni}(t_{m-1})}{\tau^2}\right.$$

$$+\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\left(\frac{u_{nj}(t_{m+1})+u_{nj}(t_m)}{2}\right)^2+\left(\frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right)^2\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{u_{ni}(t_{m+1})+2u_{ni}(t_m)+u_{ni}(t_{m-1})}{4}\right]\right\}+f_i(t_m), \qquad (8.4)$$

$$m=1,2,\dots,M-1$$

და ψ_{ni}^0 არის (5.2)-ის მეორე საწყისი პირობის აპროქსიმაციის ცდომილება

$$\psi_{ni}^0=-\frac{u_{ni}(t_1)-u_{ni}(t_0)}{\tau}+u_{ni}'(t_0). \qquad (8.5)$$

8.2. სისტემის მატრიცული სახე. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\Delta y_{ni}^m=\frac{\Delta u_{ni}^m-\Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau},\quad \Delta z_{ni}^m=\frac{i\pi}{L}\frac{\Delta u_{ni}^m+\Delta u_{ni}^{m-1}}{2}, \qquad (8.6)$$

რომელთა საშუალებით შევცვალოთ სისტემა (8.2) განტოლებათა ეკვივალენტური სისტემით

$$\frac{1}{\tau}a_i\Delta y_{ni}^{m+1}+b_i\Delta z_{ni}^m=\frac{1}{\tau}a_i\Delta y_{ni}^m-b_i\Delta z_{ni}^m-\sum_{j=1}^n b_{ij}\Delta z_{nj}^m+\psi_{ni}^m,$$

$$-c_i\Delta y_{ni}^{m+1}+\frac{1}{\tau}\Delta z_{ni}^{m+1}=c_i\Delta y_{ni}^m+\frac{1}{\tau}\Delta z_{ni}^m, \qquad (8.7)$$

სადაც

$$a_i=1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2,$$

$$b_i=\frac{1}{2}\frac{i\pi}{L}\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2+\lambda+\frac{L}{4}\sum_{j=1}^n\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\left(\frac{u_{nj}^{m+1}+u_{nj}^m}{2}\right)^2+\left(\frac{u_{nj}^m+u_{nj}^{m-1}}{2}\right)^2\right)\right],$$

$$b_{ij}=\frac{L}{4}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\frac{j\pi}{L}\frac{u_{ni}(t_{m+1})+2u_{ni}(t_m)+u_{ni}(t_{m-1})}{4}$$

$$\times\left(\frac{u_{nj}^m+u_{nj}^{m-1}}{2}+\frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right), \qquad (8.8)$$

$$c_i=\frac{1}{2}\frac{i\pi}{L}.$$

შემოვიღოთ მეორე რიგის ბლოკური მატრიცები

$$Z=\begin{pmatrix}\frac{1}{\tau}A & B\\ -C & \frac{1}{\tau}I\end{pmatrix},\quad \bar{Z}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\tau}A & -B\\ C & \frac{1}{\tau}I\end{pmatrix}, \qquad (8.9)$$

სადაც A, B, C და I არის n-ური რიგის შემდეგი სახის დიაგონალური მატრიცები

$$A=diag(a_1,a_2,\dots,a_n),\quad B=diag(b_1,b_2,\dots,b_n),$$
$$C=diag(c_1,c_2,\dots,c_n),\quad I=diag(1,1,\dots,1). \qquad (8.10)$$

ჩვენ დაგვჭირდება n-განზომილებიანი ვექტორები, სახელდობრ, Δy_{ni}^m, Δz_{ni}^m რიცხვებისგან შემდგარი ვექტორები და 0-ვექტორი

$$\Delta y^m=\begin{pmatrix}\Delta y_{n1}^m\\ \Delta y_{n2}^m\\ \vdots\\ \Delta y_{nn}^m\end{pmatrix},\quad \Delta z^m=\begin{pmatrix}\Delta z_{n1}^m\\ \Delta z_{n2}^m\\ \vdots\\ \Delta z_{nn}^m\end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \qquad (8.11)$$

აგრეთვე გამოვიყენებთ შემდეგ ვექტორებს, რომელთა კომპონენტები წარმოადგენს $u_{ni}(t_m)$ და u_{ni}^m სიდიდეების კომბინაციას ან ψ_{ni}^m სიდიდეებს,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w_b = \begin{pmatrix} w_{b1} \\ w_{b2} \\ \vdots \\ w_{bn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{w}_b = \begin{pmatrix} \overline{w}_{b1} \\ \overline{w}_{b2} \\ \vdots \\ \overline{w}_{bn} \end{pmatrix}, \psi^{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{m}}_{\mathrm{n1}} \\ \psi^{\mathrm{m}}_{\mathrm{n2}} \\ \vdots \\ \psi^{\mathrm{m}}_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}, \tag{8.12}$$

სადაც აქ გამოყენებული კომპონენტები განისაზღვრება ტოლობებით

$$\begin{aligned} v_i &= \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \frac{u_{ni}(t_{m+1}) + 2u_{ni}(t_m) + u_{ni}(t_{m-1})}{4}, \\ w_{bi} &= \frac{L}{4}\frac{i\pi}{L}\left(\frac{u_{ni}^{m+1} + u_{ni}^{m}}{2} + \frac{u_{ni}(t_{m+1}) + u_{ni}(t_m)}{2}\right), \\ \overline{w}_{bi} &= \frac{L}{4}\frac{i\pi}{L}\left(\frac{u_{ni}^{m} + u_{ni}^{m-1}}{2} + \frac{u_{ni}(t_m) + u_{ni}(t_{m-1})}{2}\right), \end{aligned} \tag{8.13}$$

ხოლო ψ_{ni}^m განსაზღვრულია (8.4) გამოსახულებით.

შემოღებული აღნიშვნების გამოყენებით წარმოვადგინოთ (8.7) სისტემა შემდეგი სახით

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}A & B + v\mathrm{w}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} \\ -C & \frac{1}{\tau}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{y}^{m+1} \\ \Delta \mathrm{z}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}A & -\left(B + v\overline{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}\right) \\ C & \frac{1}{\tau}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{y}^{m} \\ \Delta \mathrm{z}^{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{m}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

(8.11)-(8.13) აღნიშვნების გამოყენებით შემოვიღოთ $2n$-განზომილებიანი ვექტორები

$$V = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 \\ w_b \end{pmatrix}, \quad \overline{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{w}_b \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

(8.14)-დან, (8.9)-ისა და (8.15)-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{y}^{m+1} \\ \Delta \mathrm{z}^{m+1} \end{pmatrix} = (Z + VW^T)^{-1} \left[(\bar{Z} - V\overline{W}^T) \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{y}^{m} \\ \Delta \mathrm{z}^{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{m}} \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

8.3. შერმან-მორისონის ფორმულის გამოყენება. მაშასადამე, გვაქვს

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{y}^{m+1} \\ \Delta \mathrm{z}^{m+1} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{y}^{m} \\ \Delta \mathrm{z}^{m} \end{pmatrix} + (Z + VW^T)^{-1} \begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{m}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.16}$$

სადაც

$$\Lambda = (Z + VW^T)^{-1}(\bar{Z} - V\overline{W}^T). \tag{8.17}$$

შერმან-მორისონის (Sherman-Morrison) [68] ფორმულის თანახმად,

$$(Z + VW^T)^{-1} = Z^{-1} - \frac{Z^{-1}VW^T}{1 + W^T Z^{-1} V} Z^{-1}.$$

ამრიგად,

$$(Z + VW^T)^{-1} = Z^{-1} - \delta Z Z^{-1}, \tag{8.18}$$

სადაც

$$\delta Z = \frac{Z^{-1}VW^T}{1 + W^T Z^{-1} V} \,. \tag{8.19}$$

შევნიშნოთ, რომ $(Z + VW^T)^{-1}$ მატრიცის არსებობისთვის საკმარისია, რომ Z იყოს შექცევადი მატრიცი და $1 + W^T Z^{-1} V \neq 0$ [68]. პირველი პირობის შესრულება გამომდინარეობს (8.8)-(8.10) განსაზღვრებებიდან, ხოლო მეორე პირობა სრულდება, თუ τ ბიჯი აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემულ (8.58) მოთხოვნას. ვიგულისხმოთ, რომ (8.58) სრულდება.

8.4. აპრიორული უტოლობები. აქ დავამტკიცებთ რამდენიმე დამხმარე შეფასებას.

ლ ე მ ა 8 . 1 . (4.1) გაშლის კოეფიციენტებისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\begin{gathered}
\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\left(u'_{ni}(t_m)\right)^2 \le \theta_0 \,, \\
m = 0, 1, \dots, M, \\
\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2l}\left(\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + u_{ni}(t_m)}{2}\right)^2 \le \theta_{2-l}, \\
l = 1, 2, \quad m = 0, 1, \dots, M-1,
\end{gathered} \tag{8.20}$$

სადაც

$$\begin{gathered}
\theta_0 = \left(\|u^1(x)\|^2 + h\left\|u^{1'}(x)\right\|^2 + \left\|u^{0''}(x)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda + \left\|u^{0'}(x)\right\|^2\right)^2 \right. \\
\left. + \frac{1}{1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}\int_0^T \|\pi_n f(x,t)\|^2 \right) e^T,
\end{gathered} \tag{8.21}$$

$$\theta_1 = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + 2\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\theta_0\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \lambda\right).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (8.20) და (8.21) ფორმულების მისაღებად საკმარისია გამოვიყენოთ (7.14), (7.17)-(7.19) და (7.21)-ის პირველი ფორმულა (4.3)-თან ერთად.

ლემა დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 8 . 2 . (5.1), (5.2) სხვაობიანი სქემის ამონახსნისათვის მართებულია უტოლობები

$$\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\left(\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m}}{\tau}\right)^2 \leq \bar{\theta}_0\ ,$$
$$m=0,1,\dots,M-1,$$
$$\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2l}\left(\frac{u_{ni}^{m+1}+u_{ni}^{m}}{2}\right)^2 \leq \bar{\theta}_{2-l},$$
$$l=1,2,\ \ m=0,1,\dots,M-1, \tag{8.22}$$

სადაც

$$\bar{\theta}_0=\left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\left(\frac{u_{ni}^{1}-u_{ni}^{0}}{\tau}\right)^2+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}^{1}+u_{ni}^{0}}{2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{ni}^{1}+u_{ni}^{0}}{2}\right)^2\right)^2+\frac{\tau}{1-\tau/2}\sum_{l=1}^{m}\|f(x,t_l)\|^2\right)e^{\frac{T}{1-\tau/2}}, \tag{8.23}$$
$$\bar{\theta}_1=\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^4+2\lambda\left(\frac{\pi}{L}\right)^2+2\bar{\theta}_0\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^2+\lambda\right).$$

დამტკიცება. ქვემოთ ჩვენ ვისარგებლებთ იმით, რომ

$$\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m-1}}{\tau}=\frac{(u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m})+(u_{ni}^{m}-u_{ni}^{m-1})}{\tau}=\frac{(u_{ni}^{m+1}+u_{ni}^{m})-(u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1})}{\tau}.$$

გავამრავლოთ (5.1) განტოლება $\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m-1}}{\tau}$ გამოსახულებაზე და მიღებული ტოლობა ავჯამოთ i-ს მიმართ, $i=1,2,\dots,n$. მივიღებთ

$$\frac{1}{\tau}\left(\Phi_n^{m+1}-\Phi_n^{m}\right)=\sum_{i=1}^{n}f_i^m\,\frac{(u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m})+(u_{ni}^{m}-u_{ni}^{m-1})}{\tau},$$
$$m=1,2,\dots,M-1,$$

სადაც

$$\Phi_n^m=\sum_{i=1}^{n}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\left(\frac{u_{ni}^{m}-u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1}}{2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{L}\left(\lambda+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{ni}^{m}+u_{ni}^{m-1}}{2}\right)^2\right)^2, \tag{8.24}$$
$$m=1,2,\dots\ ,M.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\Phi_n^{m+1}\leq\Phi_n^{m+1}+\tau\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m})+(u_{ni}^{m}-u_{ni}^{m-1})}{\tau}\right)^2\right)$$

$$\leq \Phi_n^m + \tau\left(\sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^m}{\tau}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_{ni}^m-u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right)^2\right)\right).$$

(8.24) აღნიშვნის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\Phi_n^{m+1} \leq \Phi_n^{m+1} - \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^m}{\tau}\right)^2$$

$$\leq \Phi_n^m + \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_{ni}^m-u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right)^2 + \tau\sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2 \leq \left(1+\frac{\tau}{2}\right)\Phi_n^m + \tau\sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2.$$

მაშასადამე,

$$\Phi_n^{m+1} \leq \alpha\Phi_n^m + \tau\beta\sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2,$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1,$$

სადაც

$$\alpha = 1 + \frac{\tau}{1-\frac{\tau}{2}}, \quad \beta = \frac{1}{1-\frac{\tau}{2}}.$$

აქედან, იმის გამო, რომ

$$\alpha^m \leq \alpha^M, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \alpha = 1 + \tau\beta = 1 + \beta\frac{T}{M},$$

გვექნება

$$\Phi_n^{m+1} \leq \alpha\left(\alpha\Phi_n^{m-1} + \tau\beta\sum_{i=1}^{n}(f_i^{m-1})^2\right) + \tau\beta\sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2$$

$$= \alpha^2\Phi_n^{m-1} + \tau\beta\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}(f_i^{m-1})^2 + \sum_{i=1}^{n}(f_i^m)^2\right) \leq \cdots \leq \alpha^{m-1}\left(\Phi_n^1 + \tau\beta\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^{m-l}\right)^2\right).$$

ამრიგად,

$$\Phi_n^{m+1} \leq \left(\Phi_n^1 + \tau\beta\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^{m-l}\right)^2\right)\left(1+\beta\frac{T}{M}\right)^M. \tag{8.25}$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$\left(1+\beta\frac{T}{M}\right)^M \leq e^{\beta T} \tag{8.26}$$

და, (2.6), (2.9) და (5.2) გამოსახულებების თანახმად,

$$\tau\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i^{m-l}\right)^2 = \tau\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(t_l)\right)^2$$

$$\leq \tau \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \big(f_i(t_l)\big)^2 = \frac{2}{L} \tau \sum_{l=1}^{m} \|f(x, t_l)\|^2 , \quad m = 1, 2, \dots , M - 1. \qquad (8.27)$$

ახლა, დასამტკიცებელი (8.22) შეფასებებისა და (8.23) ფორმულების მისაღებად საკმარისია (8.25) უტოლობაში გამოვიყენოთ (8.26), (8.27) და (8.24) ფორმულა $m = 1$-თვის.

ლემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 8.1. ვთქვათ,

$$u^l(x) \in C_2[0, L], \quad l = 0, 1, \quad f(x, t) \in C_{2,2}\big((0, L) \times (0, T]\big).$$

მაშინ $\bar{\theta}_0$-ის გამოსათვლელი ფორმულა რჩება ძალაში, მაგრამ, არსებობს დამატებითი შესაძლებლობა (8.22) შეფასებისთვის, $\bar{\theta}_0$ განისაზღვროს არა ისე, როგორც ეს ასახულია (8.23)-ში. შესაბამისი ფორმულის მისაღებად გამოვიყენებთ (5.2)-ს იმ განსხვავებით, რომ მის მეორე ტოლობას შევცვლით ნაკლები სიზუსტის ტოლობით

$$\frac{u_{ni}^1 - u_{ni}^0}{\tau} = u_i^1.$$

ამის გარდა, გამოვიყენებთ უტოლობას

$$\left(a + \frac{1}{2} b\right)^2 \leq \frac{5}{4} (a^2 + b^2).$$

(8.24) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს

$$\Phi_n^1 = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right) (u_i^1)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \left(u_i^0 + \frac{1}{2} \tau u_i^1\right)^2$$
$$+ \frac{1}{L} \left(\lambda + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(u_i^0 + \frac{1}{2} \tau u_i^1\right)^2\right)^2$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right) (u_i^1)^2 + \frac{5}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \left((u_i^0)^2 + \frac{1}{4} \tau^2 (u_i^1)^2\right)$$
$$+ \frac{1}{L} \left(\lambda + \frac{5L}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left((u_i^0)^2 + \frac{1}{4} \tau^2 (u_i^1)^2\right)\right)^2 . \qquad (8.28)$$

ტრაპეციის ფორმულის თანახმად,

$$\tau \sum_{l=1}^{m} \|f(x, t_l)\|^2 \leq \tau \left(\frac{1}{2} \|f(x, t_0)\|^2 + \sum_{l=1}^{M-1} \|f(x, t_l)\|^2 + \frac{1}{2} \|f(x. t_M)\|\right)$$
$$\leq \int_0^T \|f(x, t)\|^2 dt + \frac{1}{12} \tau^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |(\|f(x, t)\|^2)_{tt}|, \qquad (8.29)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1.$$

(8.26)-(8.29) ფორმულების (8.25) უტოლობაში გამოყენების შედეგად ვპოულობთ $\bar{\theta}_0$-სიდიდის გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას

$$\bar{\theta}_0 = \|u^1(x)\|^2 + h\left\|u^{1'}(x)\right\|^2$$
$$+\frac{5}{4}\left(\left\|u^{0''}(x)\right\|^2 + \frac{1}{4}\tau^2\left\|u^{1''}(x)\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{5}{4}\left(\left\|u^{0'}(x)\right\|^2 + \frac{1}{4}\tau^2\left\|u^{1'}(x)\right\|^2\right)\right)^2$$
$$+\frac{1}{1-\frac{\tau}{2}}\left(\int_0^T \|f(x,t)\|^2 dt + \frac{1}{12}\tau^2 T \max_{0\le t\le T}\left|(\|f(x,t)\|^2)_{tt}\right|\right)e^{\frac{T}{1-\frac{\tau}{2}}}. \qquad (8.30)$$

(8.30) ფორმულით გამოთვლილი $\bar{\theta}_0$ გამოიყენება (8.23)-ში. ასევე $\bar{\theta}_1$ პარამეტრის შესაბამისი მნიშვნელობის მისაღებად.

8.5. მატრიცების ნორმების შეფასება. (8.17)-(8.19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერად განსაზღვრული მატრიცული ნორმის შემთხვევაში მართებულია უტოლობა

$$\|\Lambda\| \le (1 + \|\delta Z\|)\|Z^{-1}(\bar{Z} - V\bar{W}^T)\|. \qquad (8.31)$$

ქვემოთ p-ური რიგის $K = \left(k_{ij}\right)_{i,j=1}^p$ მატრიცისთვის ნორმა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$\|K\| = \max_{1\le j\le p}\sum_{i=1}^{p}\left|k_{ij}\right|.$$

ასეთ შემთხვევაში $x = (x_i)_{i=1}^p$ ვექტორის ნორმა გამოითვლება ფორმულით

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{p}|x_i|.$$

(8.9), (8.10) და (8.15)-ის საფუძველზე გვექნება

$$Z^{-1}(\bar{Z} - V\bar{W}^T) = \begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -\tau B\\ \tau C & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A & -\tau(B + v\bar{w}_b^T)\\ \tau C & I\end{pmatrix} = M_1 + M_2, \qquad (8.32)$$

სადაც

$$M_1 = \begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A - \tau^2 BC & -2\tau B\\ 0 & A - \tau^2 BC\end{pmatrix}, \qquad (8.33)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\tau v\bar{w}_b^T\\ 0 & -\tau^2 C v\bar{w}_b^T\end{pmatrix}, \qquad (8.34)$$

$$\Delta = (A + \tau^2 BC)^{-1} = diag^{-1}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n), \qquad (8.35)$$
$$\Delta_i = a_i + \tau^2 b_i c_i,$$

ხოლო 0 არის n-ური რიგის ნულოვანი მატრიცი.

ახლა შევაფასოთ $Z^{-1}(\bar{Z}-V\bar{W}^T)$ მატრიცის ნორმა. (8.32)-დან გამომდინარეობს

$$\|Z^{-1}(\bar{Z}-V\bar{W}^T)\| \leq \|M_1\| + \|M_2\|. \tag{8.36}$$

ლ ე მ ა 8 . 3 . სრულდება უტოლობა

$$\|M_1\| \leq 1 + \tau p_1 \, , \tag{8.37}$$

სადაც

$$p_1 = max\left(\frac{1}{h}, \lambda + \bar{\theta}_1\right)\frac{n\pi}{L} \, . \tag{8.38}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . M_1 წარმოადგენს $2n$ რიგის მატრიცს, $M_1 = \left(m_{ij}^1\right)_{i,j=1}^{2n}$, რომლის ყოველ j-ურ სვეტში, $j = 1, 2, \dots, n$ შემთხვევაში ერთი ელემენტი, ხოლო $j = n+1$, $n+2, \dots, 2n$ შემთხვევაში ორი ელემენტი განსხვავდება ნულისაგან. მატრიცს აქვს შემდეგი სახე

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{11}^1 & \cdots & 0 & m_{1,n+1}^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n,n}^1 & 0 & \cdots & m_{n,2n}^1 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n+1,n+1}^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & m_{2n,2n}^1 \end{pmatrix}. \tag{8.39}$$

შევაფასოთ თითოეული არანულოვანი ელემენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა. ამისათვის გამოვიყენებთ (8.33), (8.10) და (8.35) თანაფარდობებს. $i = 1,2,\dots,n$-თვის სრულდება

$$\left|m_{ii}^1\right| = \left|\frac{-(a_i + \tau^2 b_i c_i)}{a_i + \tau^2 b_i c_i}\right| = 1 \, . \tag{8.40}$$

შემდეგ

$$\left|m_{n+i,i}^1\right| = 0, \quad i = 1, 2, \dots \, , n. \tag{8.41}$$

შევაფასოთ $m_{i,n+i}^1$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა, $i = 1, 2, \dots, n$. (8.8)-ისა და (8.22)-ის ძალით

$$\left|m_{i,n+i}^1\right| = 2\tau\left|\frac{b_i}{a_i + \tau^2 b_i c_i}\right|$$

$$\leq \tau \frac{\frac{i\pi}{L}}{1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + \lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(\left(\frac{u_{nj}^{m+1} + u_{nj}^m}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_{nj}^m + u_{nj}^{m-1}}{2}\right)^2\right)\right]$$

$$\leq \tau \frac{\frac{i\pi}{L}}{1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}\left[\lambda+\bar{\theta}_1+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right] \leq \tau \frac{n\pi}{L}\frac{1}{1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}\left[\lambda+\bar{\theta}_1+\frac{1}{h}\cdot h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right]$$

$$\leq \tau \max\left(\frac{1}{h},\lambda+\bar{\theta}_1\right)\frac{n\pi}{L}. \tag{8.42}$$

$i = 1,2,\dots,n$-სთვის, (8.8)-ის გამო, გვაქვს

$$\left|m^1_{n+i,n+i}\right| = \left|\frac{a_i-\tau^2 b_i c_i}{a_i+\tau^2 b_i c_i}\right| < 1. \tag{8.43}$$

თუ გამოვიყენებთ (8.40)-(8.43) გამოსახულებებს და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\|M_1\| = \max\left[\left(\max_i\left|m^1_{ii}\right| + \max_i\left|m^1_{n+i,i}\right|\right),\left(\max_i\left|m^1_{i,n+i}\right| + \max_i\left|m^1_{n+i,n+i}\right|\right)\right],$$

სადაც $i = 1,2,\dots,n$, მივიღებთ უტოლობას

$$\|M_1\| \leq 1+\tau\max\left(\frac{1}{h},\lambda+\bar{\theta}_1\right)\frac{n\pi}{L}.$$

მაშასადამე, სრულდება (8.37) და (8.38).

ლემა დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 8 . 4 . მართებულია შეფასება

$$\|M_2\| \leq \tau p_2\,, \tag{8.44}$$

სადაც

$$p_2 = p_{21}+p_{22}\sqrt{n}\,,$$
$$p_{21} = \frac{1}{4}(\theta_1+\bar{\theta}_1+2L), \qquad p_{22} = \frac{2}{L}\left(1+\left(\frac{1}{2}\max\left(1,\frac{L}{\pi}\right)\right)^2\right)\sqrt{\theta_0}\,. \tag{8.45}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . როგორც (8.34)-დან ვასკვნით, M_2 წარმოადგენს $2n$ რიგის $M_2 = \left(m^2_{ij}\right)^{2n}_{i,j=1}$ მატრიცს, რომლის ყოველ j-ურ სვეტში, $j = 1,2,\dots,n$ შემთხვევაში ყველა ელემენტი ნულია, ხოლო $j = n+1,n+2,\dots,2n$ შემთხვევაში არცერთი ელემენტი არ უდრის ნულს. მატრიცს აქვს შემდეგი სახე

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m^2_{1,n+1} & \cdots & m^2_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m^2_{2,n+1} & \cdots & m^2_{n,2n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n+1,n+1} & \cdots & m_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{2n,n+1} & \cdots & m_{2n,2n} \end{pmatrix}, \tag{8.46}$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
m^2_{i,n+j} &= -\frac{\tau v_i \bar{w}_{bj}}{a_i + \tau^2 b_i c_i}\,, \\
m^2_{n+i,n+j} &= -\frac{\tau^2 c_i v_i \bar{w}_{bj}}{a_i + \tau^2 b_i c_i}\,, \\
i = 1, 2, \dots, n,& \qquad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{8.47}
$$

(8.46)-ისა და (8.47)-ის თანახმად,

$$
\|M_2\| = \tau \max_{1\le i\le n} |\bar{w}_{bi}| \sum_{j=1}^{n} \frac{(1+\tau c_j)|v_j|}{a_j + \tau^2 b_j c_j}\,. \tag{8.48}
$$

(8.13), (8.22) და (4.1), (8.20) გამო

$$
\begin{aligned}
|\bar{w}_{bi}| &\le \frac{L}{4}\frac{i\pi}{L}\left(\left|\frac{u^m_{ni}+u^{m-1}_{ni}}{2}\right| + \left|\frac{u_{ni}(t_m)+u_{ni}(t_{m-1})}{2}\right|\right) \\
&\le \frac{L}{8}\left\{\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u^m_{ni}+u^{m-1}_{ni}}{2}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{ni}(t_m)+u_{ni}(t_{m-1})}{2}\right) + 1\right]\right\} \\
&\le \frac{L}{8}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u^m_{nj}+u^{m-1}_{nj}}{2}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right)^2 + 2\right] \\
&\le \frac{1}{4}(\theta_1 + \bar{\theta}_1 + 2L), \quad i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{8.49}
$$

ხოლო (8.13), (8.8) და (4.1), (8.20) ძალით,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\frac{|v_j|}{a_j + \tau b_j c_j} &\le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{nj}(t_{m+1})+u_{nj}(t_m)}{2} + \frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\sqrt{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{nj}(t_{m+1})+u_{nj}(t_m)}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{nj}(t_m)+u_{nj}(t_{m-1})}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\le 2\frac{\sqrt{\theta_0}}{L}\sqrt{n}\,.
\end{aligned} \tag{8.50}
$$

ვინაიდან, (8.8)-ის თანახმად,

$$
\frac{\tau c_j}{a_j + \tau^2 b_j c_j} \le \frac{1}{2}\frac{\tau\frac{i\pi}{L}}{1+\frac{1}{4}\tau^2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4} \le \frac{1}{4}\frac{1+\frac{1}{4}\tau^2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}{1+\frac{1}{4}\tau^2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4} = \frac{1}{4}\frac{1+\frac{1}{4}\tau^2\left(\frac{L}{i\pi}\right)^2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4}{1+\frac{1}{4}\tau^2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4}
$$

$$
\le \left(\frac{1}{2}max\left(1, \frac{L}{\pi}\right)\right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, n,
$$

ამიტომ, (8.50) მსგავსად, მივიღებთ

$$
\sum_{j=1}^{n}\frac{\tau c_j|v_j|}{a_j + \tau^2 b_j c_j} \le 2\frac{\sqrt{\theta_0}}{L}\left(\frac{1}{2}max\left(1, \frac{L}{\pi}\right)\right)^2\sqrt{n}\,. \tag{8.51}
$$

(8.48)-(8.51) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს (8.44), (8.45) ფორმულების მართებულობა.

ლემა დამტკიცებულია.

(8.36), (8.37) და (8.44) შეფასებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

ლემა 8.5. ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|Z^{-1}(\bar{Z} - V\bar{W}^T)\| \le 1 + \tau(p_1 + p_2)\,. \tag{8.52}$$

ახლა ჩვენი მიზანია (8.19) ფორმულით განსაზღვრული δZ მატრიცის ნორმის შეფასება. (8.9), (8.35) და (8.15), (8.12) თანახმად,

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau I & -\tau^2 I \\ \tau^2 I & \tau A \end{pmatrix}, \tag{8.53}$$

$$VW^T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_1 w_{b1} & \cdots & v_1 w_{bn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & v_n w_{b1} & \cdots & v_n w_{bn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.54}$$

$$1 + W^T Z^{-1} V = 1 + (0 \cdots 0 \;\; w_{b1} \cdots w_{bn}) \begin{pmatrix} \tau v_1/\Delta_1 \\ \vdots \\ \tau v_n/\Delta_n \\ \tau^2 c_1 v_1/\Delta_1 \\ \vdots \\ \tau^2 c_n v_n/\Delta_n \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \tau^2 \left(\frac{1}{\Delta_1} c_1 v_1 w_{b1} + \cdots + \frac{1}{\Delta_n} c_n v_n w_{bn} \right). \tag{8.55}$$

(8.53)-ის, (8.54)-ისა და (8.35)-ის გამოყენების შედეგად ვპოულობთ

$$Z^{-1}VW^T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\Delta_1}\tau v_1 w_{b1} & \cdots & \frac{1}{\Delta_1}\tau v_1 w_{bn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\Delta_n}\tau v_n w_{b1} & \cdots & \frac{1}{\Delta_n}\tau v_n w_{bn} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\Delta_1}\tau^2 c_1 v_1 w_{b1} & \cdots & \frac{1}{\Delta_1}\tau^2 c_1 v_1 w_{bn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\Delta_n}\tau^2 c_n v_n w_{b1} & \cdots & \frac{1}{\Delta_n}\tau^2 c_n v_n w_{bn} \end{pmatrix}. \tag{8.56}$$

ლემა 8.6. სრულდება უტოლობა

$$\|Z^{-1}VW^T\| \le \tau p_2. \tag{8.57}$$

დამტკიცება. გავითვალისწინოთ (8.46), (8.47), (8.56) და (8.13) ფორმულები და (8.57) შეფასების დასაბუთებისთვის გამოვიყენოთ (8.44) უტოლობის დამტკიცების მეთოდი. განსხვავება მსჯელობაში იქნება ძალიან უმნიშვნელო.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 8.7. თუ τ ბიჯი აკმაყოფილებს პირობას

$$0 < \tau < \frac{2}{\alpha_2}\theta_0\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)(\theta_0 + \bar{\theta}_0), \tag{8.58}$$

სადაც

$$p_3 > 1, \tag{8.59}$$

მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$1 + W^T Z^{-1} V > \frac{1}{p_3}, \tag{8.60}$$

რომელიც უზრუნველყოფს $(Z + VW^T)^{-1}$ მატრიცის არსებობას.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ (8.13), (8.8), (8.20), (4.1), (8.22), (8.35) და (8.28),

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta_i}c_i v_i w_{bi}\right| \le \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta_i}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + 2u_{ni}(t_m) + u_{ni}(t_{m-1})}{4}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{L}{2}\frac{i\pi}{L}\frac{u_{ni}^{m+1} + u_{ni}^{m} + u_{ni}(t_{m+1}) + u_{ni}(t_m)}{4}\right)\right|$$
$$\le \frac{L}{4}\max_{1\le i\le n}\frac{1}{a_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + 2u_{ni}(t_m) + u_{ni}(t_{m-1})}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}^{m+1} + u_{ni}^{m} + u_{ni}(t_{m+1}) + 2u_{ni}(t_m)}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \frac{1}{2}\alpha_2^2\left[\frac{L}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + u_{ni}(t_m)}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + u_{ni}(t_{m-1})}{2}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[\frac{L}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}^{m+1} + u_{ni}^{m}}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(\frac{u_{ni}(t_{m+1}) + u_{ni}(t_m)}{2}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \frac{1}{2}\alpha_2^2\left(\theta_0\left(\frac{(\theta_0 + \overline{\theta_0})}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

თუ ამ გამოსახულებას გამოვიყენებთ (8.55) ფორმულაში, მივალთ დასკვნამდე, რომ

$$1 + W^T Z^{-1} V \geq \frac{1}{2}\alpha_2^2 \tau^2 \left(\theta_0 \left(\frac{(\theta_0 + \bar{\theta})}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (8.60) უტოლობის შესასრულებლად საკმარისია τ ბიჯი აკმაყოფილებდეს (8.58) პირობას, ხოლო p_3 პარამეტრი – (8.59) უტოლობას.

ამ შემთხვევაში $(Z + VW^T)^{-1}$ მატრიცის არსებობა გამომდინარეობს (8.18), (8.19) და (8.9), (8.10) ფორმულებიდან.

ლემა დამტკიცებულია.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება პირობა (8.58), რომელიც უზრუნველყოფს (8.60) შეფასების შესრულებას და $(Z + VW^T)^{-1}$ მატრიცის არსებობას.

გამოვიყენოთ (8.31), (8.19) გამოსახულებები (8.57), (8.60), (8.52) შეფასებებთან ერთად. შედეგად ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

ლ ე მ ა 8 . 8 . სრულდება უტოლობა

$$\|\Lambda\| \leq \big(1 + \tau(p_1 + p_2)\big)(1 + \tau p_2 p_3). \tag{8.61}$$

შევაფასოთ ახლა $(Z + VW^T)^{-1}$ მატრიცის ნორმა.

ლ ე მ ა 8 . 9 . ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|(Z + VW^T)^{-1}\| \leq \tau(1 + \tau p_2 p_3)(1 + \tau p_4)\,, \tag{8.62}$$

სადაც

$$p_4 = \max(p_4^1, p_4^2)\,,$$

$$p_4^1 = \frac{1}{2}\min\left(\max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{h}\right), \alpha_2^2 \frac{n\pi}{L}\right), \qquad p_4^2 = \frac{1}{2}\max\left(\frac{1}{h}, \lambda + \bar{\theta}_1\right)\frac{n\pi}{L}. \tag{8.63}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (8.18) და (8.19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$\|(Z + VW^T)^{-1}\| \leq \left(1 + \frac{\|Z^{-1}VW^T\|}{|1 + W^T Z^{-1} V|}\right)\|Z^{-1}\|.$$

აქედან (8.57), (8.60) უტოლობების გამოყენების შედეგად ვღებულობთ

$$\|(Z + VW^T)^{-1}\| \leq (1 + \tau p_2 p_3)\|Z^{-1}\|. \tag{8.64}$$

შევაფასოთ Z^{-1} მატრიცის ნორმა. (8.9) და (8.35)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$Z^{-1} = \tau \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\tau B \\ \tau C & A \end{pmatrix}. \tag{8.65}$$

(8.39) მატრიცის მსგავსად Z^{-1}-ს აქვს შემდეგი სახე

$$Z^{-1}=\tau\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & 0 & l_{1,n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{n,n} & 0 & \cdots & l_{n,2n} \\ l_{n+1,1} & \cdots & 0 & l_{n+1,n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{2n,n} & 0 & \cdots & l_{2n,2n} \end{pmatrix}. \qquad (8.66)$$

$Z^{-1}=\tau\left(l_{ij}\right)_{i,j=1}^{2n}$ არის $2n$ რიგის მატრიცი, რომლის ყოველ სვეტში მხოლოდ ორი ელემენტი შეიძლება განსხვავდებოდეს ნულისაგან. შევაფასოთ თითოეული ასეთი ელემენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა. ამისათვის დაგვჭირდება (8.65), (8.66), (8.10), (8.8), (8.35) და (7.28) ფორმულები. დავუშვათ, $i=1,2,\dots,n$. გვექნება

$$|l_{ii}|=\frac{1}{|a_i+\tau^2 b_i c_i|}\le 1. \qquad (8.67)$$

შემდეგ, ვინაიდან,

$$\left|l_{n+i,i}\right|=\tau\frac{c_i}{a_i+\tau^2 b_i c_i}\le\frac{1}{2}\tau\frac{\frac{i\pi}{L}}{1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2},$$

ამიტომ

$$\left|l_{n+i,i}\right|\le\frac{1}{2}\tau\max\left(\frac{1}{4},\frac{1}{h}\right),\qquad \left|l_{n+i,i}\right|\le\frac{1}{2}\tau\alpha_2^2\frac{n\pi}{L}.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\left|l_{n+i,i}\right|\le\frac{1}{2}\tau\min\left(\max\left(\frac{1}{4},\frac{1}{h}\right),\alpha_2^2\frac{n\pi}{L}\right). \qquad (8.68)$$

(8.65), (8.66) და (8.33), (8.39) ფორმულების ერთმანეთთან შედარების შედეგად ვასკვნით, რომ $l_{n+i,i}=\frac{1}{2}m_{i,n+i}^{'}$. ამიტომ (8.42) ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\left|l_{n+i,i}\right|\le\frac{1}{2}\tau\max\left(\frac{1}{h},\lambda+\bar{\theta}_1\right)\frac{n\pi}{L}. \qquad (8.69)$$

და, ბოლოს, სრულდება

$$\left|l_{n+i,n+i}\right|=\frac{a_i}{a_i+\tau^2 b_i c_i}\le 1. \qquad (8.70)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\|Z^{-1}\|=\max\left[\left(\max_i|l_{ii}|+\max_i\left|l_{n+i,i}\right|\right),\left(\max_i\left|l_{i,n+i}\right|+\max_i\left|l_{n+i,n+i}\right|\right)\right],$$

სადაც $i=1,2,\dots,n$. გამოვიყენოთ (8.67)-(8.70) და (8.64). შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ (8.62) უტოლობას, რომლის p_4 პარამეტრი განისაზღვრება (8.63) ფორმულის საშუალებით.

ლემა დამტკიცებულია.

8.6. სხვაობიანი სქემის ცდომილების შეფასება. შემოვიღოთ რამდენიმე სიდიდე.

$$u_{ni}(t) \in C_4[0,T], \tag{8.71}$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

შემთხვევისთვის აღვნიშნოთ

$$m_p = \max_{t,i}\left|\frac{d^p u_{ni}(t)}{dt^p}\right|,$$

$$0 \le t \le T, \quad i = 1,2,\dots,n, \quad p = 2,3,4.$$

ჩამოვაყალიბოთ დებულება სხვაობიანი სქემის სიზუსტის შესახებ.

თ ე ო რ ე მ ა 8 . 1 . ვთქვათ, სრულდება (8.71) და τ ბიჯი აკმაყოფილებს (8.58) პირობას. მაშინ (5.1), (5.2) სხვაობიანი სქემის ცდომილებისათვის მართებულია შეფასება

$$\|\Delta u_n^m(x)\| = \|\Delta u_n^m(x) - u_n(x,t_m)\| \le c_2\tau^2, \tag{8.72}$$

$$m = 2,3,\dots,M,$$

სადაც

$$c_2 = (c_{21} + c_{22})c_{23}, \tag{8.73}$$

$$c_{21} = \frac{1}{4}\mathrm{m}_3 n,$$

$$c_{22} = (1+\tau p_2 p_3)(1+\tau p_4)T$$

$$\times\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}m_4 n\left(1+h\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) + m_2\left(\lambda + \theta_1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{L}\theta_0\right)^{\frac{1}{2}}\left(m_2 n^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{L}\theta_0\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\left(\theta_0 + \frac{L}{8}\left(1+\tau^2 m_2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\right)\right],$$

$$c_{23} = \left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{1}{2}} max\left(1, \frac{L}{\pi}\right)e^{(p_1+p_2+\tau p_2 p_3)T}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (8.1) განსაზღვრების ძალით

$$\|\Delta u_n^m\| = \|u_n^m(x) - u_n(x,t_m)\| = \left(\frac{L}{2}\sum_{i=1}^n(\Delta u_{ni}^m)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^n|\Delta u_{ni}^m|. \tag{8.74}$$

ვაჩვენოთ, რომ მართებულია გამოსახულება

$$\sum_{i=1}^n|\Delta u_{ni}^m| \le \sum_{i=1}^n\left|\frac{\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right| + \sum_{i=1}^n\left|\frac{\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1}}{2}\right| \le \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}}c_2\tau^2. \tag{8.75}$$

(8.75) ფორმულის მარცხენა უტოლობა მტკიცდება $0 < \tau < 1$ თანაფარდობისა და შემდეგი გამოსახულების გათვალისწინებით

$$|\Delta u_{ni}^m| \le \frac{1}{2}\left|(\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}) + (\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1})\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left|\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}\right| + \left|\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tau\left|\frac{\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right| + 2\left|\frac{\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1}}{2}\right|\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\max(\tau, 2)\left(\left|\frac{\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right| + \left|\frac{\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1}}{2}\right|\right)$$

$$\le \left|\frac{\Delta u_{ni}^m - \Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right| + \left|\frac{\Delta u_{ni}^m + \Delta u_{ni}^{m-1}}{2}\right|.$$

(8.75) ფორმულის მარჯვენა უტოლობის დასამტკიცებლად შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varepsilon^m = \sum_{i=1}^{n}(|\Delta y_{ni}^m| + |\Delta z_{ni}^m|), \qquad l_1 = \|\Lambda\|,$$

$$l_2 = \|(Z + VW^T)^{-1}\|, \qquad |\Psi^m| = \sum_{i=1}^{n}|\psi_{ni}^m|.$$

მხედველობაში მივიღოთ აგრეთვე (8.16). გვექნება

$$\varepsilon^m \le l_1\varepsilon^{m-1} + l_2\left|\psi^{m-1}\right| \le l_1\left(l_1\varepsilon^{m-2} + l_2\left|\psi^{m-2}\right|\right) + l_2\psi^{m-1}$$

$$= l_1^2\varepsilon^{m-2} + \left(l_1\left|\psi^{m-2}\right| + l_2\left|\psi^{m-1}\right|\right)l_2 \le \cdots$$

$$\le l_1^{m-1}\varepsilon^1 + \left(l_1^{m-2}\left|\psi^1\right| + l_1^{m-3}\left|\psi^2\right| + \cdots + \left|\psi^{m-1}\right|\right)l_2$$

$$\le l_1^{m-1}\varepsilon^1 + (l_1^{m-2} + l_1^{m-3} + \cdots + 1)l_2 \max_{1\le s\le m-1}|\psi^s|. \tag{8.76}$$

(8.61) უტოლობის თანახმად, $s = 1,2,3,\dots,M-1$-თვის, სრულდება

$$l_1^s \le \left(1 + \frac{T}{M}(p_1+p_2)\right)^{\frac{s}{M}M}\left(1 + \frac{T}{M}\tau p_2 p_3\right)^{\frac{s}{M}M} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{T}{M}(p_1+p_2)\right)^{M}\left(1 + \frac{T}{M}\tau p_2 p_3\right)^{M} \le e^{T(p_1+p_2+\tau p_2 p_3)}.$$

თუ ამ შეფასებას გამოვიყენებთ (8.76) ფორმულაში, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\varepsilon^m \le \left(\varepsilon^1 + m l_2 \max_{1\le s\le m}\psi^s\right)e^{T(p_1+p_2+\tau p_2 p_3)}.$$

გამოვიყენოთ (8.62) და $m\tau \le T$ შეფასება. გავიხსენოთ, გარდა ამისა, (8.6) განსაზღვრება და მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$\varepsilon^1 = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta u_{ni}^1\right|.$$

შედეგად გვექნება

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta u_{ni}^{m}-\Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta u_{ni}^{m}+\Delta u_{ni}^{m-1}}{2}\right|\leq \max\left(1,\frac{L}{\pi}\right)\left[\frac{3}{2\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta u_{ni}^{1}\right|\right.$$

$$\left.+(1+\tau p_2p_3)(1+\tau p_4)T\max_{1\leq s\leq m-1}\sum_{i=1}^{n}\left|\psi_{ni}^{s}\right|\right]e^{T(p_1+p_2+\tau p_2p_3)}. \qquad (8.77)$$

გამოვიყენებთ (8.1), (8.4), ამის გარდა (2.7), (2.8), (5.2) და ტეილორის ფორმულა Δu_{ni}^{1} და ψ_{ni}^{s} წევრებისთვის. მივიღებთ

$$\frac{1}{\tau}\Delta u_{ni}^{1}=\frac{1}{6}\tau^{2}u_{ni}''',$$

$$\psi_{ni}^{s}=-\tau^{2}\left\{\frac{1}{12}\left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}\right)u_{ni}''''+\frac{1}{4}\left(\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}+\lambda\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}\right)u_{ni}''+\right.$$

$$\left.+\frac{L}{8}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}\left[\left(u_{ni}+\frac{\tau^{2}}{4}u_{ni}''\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^{2}\left(u_{nj}'^{2}+u_{nj}u_{nj}''\right)+u_{ni}''\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^{2}\rho u_{nj}^{2}\right]\right\}, \qquad (8.78)$$

სადაც პირველ ტოლობაში $u_{ni}'''=u_{ni}'''(t_0+\tau\Delta_0)$, $0\leq\Delta_0\leq 1$, ხოლო მეორეში, მსგავსად გამოყენებულია u_{ni} ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები $[t_{s-1},t_{s+1}]$ სეგმენტის წერტილებში.

გამოვიყენოთ (8.20) შეფასებებიდან გამომდინარე უტოლობები

$$\frac{L}{2}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2}|u_{ni}|\leq\frac{L}{2}\left(\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}u_{ni}^{2}+\frac{1}{4}\right)\leq\theta_0+\frac{L}{8},$$

$$i=1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^{2}u_{nj}'^{2}\leq\frac{2}{L}\theta_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^{2}\left|u_{nj}u_{nj}''\right|\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^{4}u_{nj}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}u_{nj}''^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\frac{2}{L}n\theta_0\right)m_2,$$

$$\left|u_{nj}''\right|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^{2}u_{nj}^{2}\leq\frac{2}{L}m_2\theta_1,$$

$$i=1,2,\dots,n,$$

და (8.74), (8.75), (8.77), (8.78) გამოსახულებები. შედეგად მივიღებთ (8.72) შეფასებას, რომელშიც c_2 კოეფიციენტისათვის მართებულია (8.73) ფორმულა.

თეორემა დამტკიცებულია.

9. ნიუტონის იტერაციული პროცესის სიზუსტე. გამოვიყენოთ w_{nik}^m სიდიდეები u_{ni}^m პარამეტრებისთვის იტერაციული მიახლოების ასაგებად. (6.1) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$u_{ni}^m = \frac{1}{2}\tau v_{ni}^m + \frac{L}{i\pi} w_{ni}^m,$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

ამის საფუძველზე u_{ni}^m პარამეტრის ნიუტონის პროცესის k-ური მიახლოება $k = 0, 1, \dots$, განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$u_{nik}^m = \frac{1}{2}\tau v_{nik}^m + \frac{L}{i\pi} w_{nik}^m, \tag{9.1}$$

აქ w_{nik}^m სიდიდეები მიიღება (6.10) ალგორითმის გამოყენების შედეგად, ხოლო v_{nik} სიდიდეების მისაღებად გამოვიყენებთ (6.6) ტოლობიდან გამომდინარე ფორმულას

$$v_{nik}^m = -v_{ni}^{m-1} + \frac{2L}{i\pi}\frac{w_{nik}^m - w_{ni}^{m-1}}{\tau}\,. \tag{9.2}$$

ეს ფორმულა მიღებულია დაშვებით, რომ v_{ni}^{m-1} სიდიდე w_{ni}^{m-1} სიდიდის მსგავსად, მიღებულია ისეთი სიზუსტით, რომ შესაძლებელია შესაბამისი ცდომილების უგულებელყოფა. (9.1) და (9.2) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნიუტონის პროცესს u_{nik}^m მიახლოებისთვის აქვს შემდეგი სახე

$$u_{nik}^m = -\frac{1}{2}\tau v_{ni}^{m-1} + \frac{L}{i\pi}\left(2w_{nik}^m - w_{ni}^{m-1}\right). \tag{9.3}$$

u_{nik}^m, $i = 1, 2, \dots, n$, რიცხვები წარმოადგენს იმ განტოლებათა სისტემის k-ურ მიახლოებას, რომელიც მიიღება (5.1)-დან m-ის $(m-1)$-ით შეცვლით და იმის დაშვებით, რომ ამონახსნი წინა ორ შრეზე, ანუ u_{ni}^{m-1}და u_{ni}^{m-2}, $i = 1, 2, \dots, n$, სიდიდეები ცნობილია. ჩავწეროთ ეს სისტემა შემდეგნაირად

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{u}_n^m) = \mathbf{0}, \tag{9.4}$$

სადაც

$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{u}_n^m) = \left(\tilde{\varphi}_i(\boldsymbol{u}_n^m)\right)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{u}_n^m = (u_{ni}^m)_{i=1}^n$, $\mathbf{0}$ არის n-კომპონენტიანი ნული-ვექტორი,

$$\tilde{\varphi}_i(\boldsymbol{u}_n^m) = \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{u_{ni}^m}{\tau^2}$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1}^n\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left[\left(\frac{u_{nj}^m + u_{nj}^{m-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_{nj}^{m-1} + u_{nj}^{m-2}}{2}\right)^2\right]\right)\right\}u_{ni}^m$$
$$+\frac{1}{64}L\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\left(u_{ni} + 2u_{ni}^{m-1}\right)\left(2u_{ni}^{m-1} + u_{ni}^{m-2}\right)u_{ni}^m + \tilde{\psi}_i\,,$$

ხოლო თავისუფალი $\tilde{\psi}_i$ წევრი განისაზღვრება ფორმულით

$$\tilde{\psi}_i = \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{-2u_{ni}^{m-1} + u_{ni}^{m-2}}{\tau^2} + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\left(\frac{u_{nj}^m + u_{nj}^{m-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_{nj}^{m-1} + u_{nj}^{m-2}}{2}\right)^2\right]\right) + \frac{L}{16}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 [(u_{ni}^{m-1})^2 + (u_{ni}^{m-1} + u_{ni}^{m-2})^2]\right\}$$

$$\times (2u_{ni}^{m-1} + u_{ni}^{m-2}) - f_i^m.$$

$\boldsymbol{u}_n^m$-ვექტორის გარდა შემოვიღოთ იტერაციული მიახლოების $\boldsymbol{u}_{nk}^m = (u_{nik}^m)_{i=1}^n$ ვექტო-რი. (9.3) იტერაციული პროცესის მიახლოება k-ურ ბიჯზე წარმოვადგინოთ შემდეგი ჯამის სახით

$$u_{nk}^m(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{nik}^m \sin\frac{i\pi x}{L}\ , \tag{9.5}$$

ხოლო k-ურ ბიჯზე ცდომილება განვსაზღვროთ როგორც სხვაობა

$$\Delta u_{nk}^m(x) = u_{nk}^m(x) - u_n^m(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{nik}^m \sin\frac{i\pi x}{L} - \sum_{i=1}^{n} u_{ni}^m \sin\frac{i\pi x}{L}. \tag{9.6}$$

თუ (9.3) ტოლობიდან გამოვაკლებთ (6.1) ფორმულებიდან გამომდინარე შედეგს

$$u_{ni}^m = -\frac{1}{2}\tau v_{ni}^{m-1} + \frac{L}{i\pi}(2w_{nik}^m - w_{ni}^{m-1}),$$

მივიღებთ

$$u_{nik}^m - u_{ni}^m = \frac{2L}{i\pi}(w_{nik}^m - w_{ni}^{m-1}).$$

ჩავსვათ ეს ფორმულა (9.6) გამოსახულებაში. გვექნება

$$\Delta u_{nk}^m(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(w_{nik}^m - w_{ni}^m)\sin\frac{i\pi x}{L}. \tag{9.7}$$

თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის და ვექტორის აქ შემოღებული ნორმების განსაზღვრებებს, მაშინ, (9.6)-ისა და (9.7)-ის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\|\Delta u_{nk}^m(x)\| = \|u_{nk}^m(x) - u_n^m(x)\| = \frac{(2L^3)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}(w_{nik}^m - w_{ni}^m)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{(2L^3)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\|\boldsymbol{w}_{nk}^m - \boldsymbol{w}_n^m\|, \tag{9.8}$$

სადაც $\boldsymbol{w}_{nk}^m$ ზემოთ განსაზღვრული ვექტორია, ხოლო $\boldsymbol{w}_n^m$ არის $\boldsymbol{w}_n^m = (w_{ni}^m)_{i=1}^n$ სახის ვექტორი. აგრეთვე, $\| \quad \|$-ით აღნიშნულია ვექტორის ევკლიდეს ნორმა.

ახლა ჩვენი მიზანი მდგომარეობს $\|\boldsymbol{w}_{nk}^m - \boldsymbol{w}_n^m\|$ ნორმის შეფასებაში.

9.1. იაკობიანის შებრუნებული მატრიცის ნორმის შეფასება. (6.10) ფორმულაში გამოყენებულია იაკობიანი, რომელიც განისაზღვრება ტოლობებით

$$J(\boldsymbol{w}_{nk}^m) = \left(J_{ij}\right)_{i,j=1}^n, \qquad J_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(\boldsymbol{w}_{nk}^m)}{\partial\left(w_{njk}^m\right)}. \tag{9.9}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.8) ფორმულას, ვპოულობთ

$$J_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i\pi}{4}(w_{nik}^m + w_{ni}^{m-1})w_{njk}^m, \qquad j \neq i, \\ \left(1 + h\left(\dfrac{i\pi}{L}\right)^2\right)\dfrac{2L}{\tau^2 i\pi} \\ \quad + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{i\pi}{L}\right)^3 + \dfrac{i\pi}{L}\left[\lambda + \dfrac{L}{4}\sum_{j=1}^n\left(\left(w_{njk}^m\right)^2 + \left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right]\right\} \\ \quad + \dfrac{i\pi}{4}(w_{nik}^m)^2 + \dfrac{i\pi}{4}w_{ni}^{m-1}w_{nik}^m, \qquad j = i. \end{cases} \tag{9.10}$$

დავუშვათ, რომ (6.10) მეთოდში m-ურ შრეზე იტერაციის საწყის მიახლოებად გამოყენებულია საბოლოო იტერაციული მიახლოება $(m-1)$ შრიდან. მაშასადამე,

$$w_{ni0}^m = w_{ni}^{m-1}, \qquad i = 1, 2, \dots\ , n. \tag{9.11}$$

(9.9)-(9.11) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს

$$J(\boldsymbol{w}_{n0}^m) = R + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T, \tag{9.12}$$

სადაც

$$R = \operatorname{diag}(R_1 R_2 \cdots R_n),$$

$$R_i = \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{2L}{\tau^2 i\pi} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3 + \frac{i\pi}{L}\left[\lambda + \frac{L}{2}\sum_{j=1}^n\left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right]\right\} + \frac{i\pi}{L}(w_{ni}^{m-1})^2, \tag{9.13}$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} w_{n1}^{m-1} \\ 2w_{n2}^{m-1} \\ \vdots \\ nw_{nn}^{m-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} w_{n1}^{m-1} \\ w_{n2}^{m-1} \\ \vdots \\ w_{nn}^{m-1} \end{pmatrix}. \tag{9.14}$$

შერმან-მორისონის (Sherman-Morrison) ფორმულის [68] თანახმად,

$$(R + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = R^{-1} - \frac{R^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T R^{-1}}{1 + \boldsymbol{v}^T R^{-1}\boldsymbol{u}}. \tag{9.15}$$

(9.12)-(9.15) ფორმულებიდან ვასკვნით, რომ

$$J^{-1}(\boldsymbol{w}_n^m) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} \ \dots \ \frac{1}{R_n}\right) - \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} w_{n1}^{m-1} \\ \frac{2}{R_2} w_{n2}^{m-1} \\ \vdots \\ \frac{n}{R_n} w_{nn}^{m-1} \end{pmatrix}\left(\frac{w_{n1}^{m-1}}{R_1}\frac{w_{n2}^{m-1}}{R_2} \ \dots \ \frac{w_{nn}^{m-1}}{R_n}\right), \tag{9.16}$$

$$\sigma = \frac{2}{\pi} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{R_i}(w_{ni}^{m-1})^2. \tag{9.17}$$

ლემა 8.2-ის საფუძველზე, (6.1) აღნიშვნების გათვალისწინებით, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულება.

ლ ე მ ა 9 . 1 . მართებულია უტოლობები

$$\begin{gathered} \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)(v_{ni}^m)^2 \le \bar{\theta}_0, \\ \frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{2l}(w_{ni}^m)^2 \le \bar{\theta}_{1-l}, \ \ l = 0, 1, \\ m = 1, 2, \dots \ , M, \end{gathered} \tag{9.18}$$

სადაც $\bar{\theta}_0$ და $\bar{\theta}_1$ პარამეტრები განისაზღვრება (8.23) ფორმულებით.

ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი ფაქტი. ვინაიდან $g(x) = \frac{1}{x} + ax, \ a = const > 0, \ 0 < x < \infty$, ფუნქციისთვის

$$\min_{0<x<\infty} g(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 2\sqrt{a}\,,$$

ამიტომ

$$\min_{1\le i\le n}\left(\frac{L}{i\pi} + h\,\frac{i\pi}{L}\right) = \frac{L}{\pi}\min_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{i} + h\,\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 i\right) \ge \rho$$

$$= \begin{cases} \dfrac{L}{\pi} + h\dfrac{\pi}{L}\,, & \text{თუ } \ 0 < \dfrac{L}{\pi\sqrt{h}} \le 1, \\ 2\sqrt{h}, & \text{თუ } \ 1 \le \dfrac{L}{\pi\sqrt{h}} \le n\,, \\ \dfrac{L}{n\pi} + h\dfrac{n\pi}{L}\,, & \text{თუ } \ n \le \dfrac{L}{\pi\sqrt{h}}\,. \end{cases} \tag{9.19}$$

შევაფასოთ $J^{-1}(\boldsymbol{w}_{nk}^m)$ მატრიცის ნორმა, როცა $k = 0$. მაშინ, (9.11) დაშვების თანახმად, გვექნება

$$J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m) = J^{-1}(\boldsymbol{w}_n^{m-1}). \tag{9.20}$$

ლ ე მ ა 9 . 2 . ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^{m})\| \le c_{\mathbf{30}}\tau^{2}, \tag{9.21}$$

სადაც

$$c_{30} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{L\bar{\theta}_0}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \max\left(1, \frac{L^3}{24}\right). \tag{9.22}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (9.16) ტოლობის თანახმად,

$$\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n}^{m-1})\| \le \sum_{\boldsymbol{l}=\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \max_{1\le j\le n} |\mathrm{I}_l|, \tag{9.23}$$

სადაც

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{R_j}, \qquad \mathrm{I}_2 = \frac{1}{\sigma}\left|w_{nj}^{m-1}\right|\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{R_i}\left|w_{ni}^{m-1}\right|\right)\mathrm{I}_1. \tag{9.24}$$

(9.13) და (9.19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს

$$R_j \ge \frac{2}{\tau^2}\rho + \frac{1}{2}\frac{j\pi}{L}\left(\lambda + \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\right) \ge \frac{2}{\tau^2}\rho + \frac{1}{2}\frac{\pi}{L}\left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right). \tag{9.25}$$

ამრიგად, (9.24) და (9.25) გამოსახულების საფუძველზე ვასკვნით, რომ

$$\max_{1\le j\le n}|\mathrm{I}_1| \le \frac{1}{\frac{2}{\tau^2}\rho + \frac{1}{2}\frac{\pi}{L}\left(\lambda + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)} \le \frac{1}{2\rho}\tau^2. \tag{9.26}$$

შევაფასოთ I_2. (9.17) და (9.13) გამოსახულებებიდან ვღებულობთ

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{R_i}\left|w_{ni}^{m-1}\right| \le \frac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{R_i}(w_{ni}^{m-1})^2}{\frac{2}{\pi} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{R_i}(w_{ni}^{m-1})^2},$$

და

$$R_i \ge \left(\frac{i\pi}{L}\right)^3.$$

გარდა ამისა, მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{9.27}$$

შედეგი იქნება ასეთი

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{R_i}\left|w_{ni}^{m-1}\right| \le \max\left(1, \frac{L^3}{24}\right). \tag{9.28}$$

თუ გავითვალისწინებთ (9.18)-სა და (9.27) ტოლობას, მივიღებთ

$$\left|w_{nj}^{m-1}\right| \le \sum_{j=1}^{n}\frac{L}{i\pi}\frac{i\pi}{L}\left|w_{nj}^{m-1}\right| \le \left(\frac{2}{L}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L}{i\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{L\bar{\theta}_0}{3}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.29)$$

(9.20), (9.23), (9.24), (9.26), (9.28) და (9.29) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს (9.21) უტოლობა და c_{30} კოეფიციენტისათვის (9.22) ფორმულა.

ლემა დამტკიცებულია.

9.2. დამხმარე უტოლობები. (9.21) უტოლობის გარდა დაგვჭირდება კიდევ რამდენიმე შეფასება.

ლ ე მ ა 9 . 3 . მართებულია უტოლობა

$$\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\| \le \left(c_{31}\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{\tau} + c_{32}(n+1)^{\frac{1}{2}} + c_{33}(n+1)^{\frac{5}{2}}\right)\tau^2, \quad (9.30)$$

სადაც

$$c_{31} = 2\max\left(1+\left(\frac{h}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{L}\right)\zeta\, c_{30}, \quad c_{32} = \left((\lambda+\bar{\theta}_1)\zeta + \frac{2}{L}\max_{0\le m\le M}\|f(x,t_m)\|^2\right)c_{30},$$
$$c_{33} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\zeta c_{30}, \qquad \zeta = \left(\frac{2}{L}\bar{\theta}_0\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.31)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (9.11) დაშვების თანახმად,

$$\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m) = \varphi(\boldsymbol{w}_n^{m-1}), \quad (9.32)$$

სადაც $\varphi(\boldsymbol{w}_n^{m-1}) = \left(\varphi_i(\boldsymbol{w}_n^{m-1})\right)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{w}_n^{m-1} = (w_{ni}^{m-1})_{i=1}^n$. რაც შეეხება ფორმულას φ_i ფუნქციისათვის, აქ, (6.8) ტოლობის ნაცვლად, გამოვიყენებთ (6.3)-დან გამომდინარე ტოლობას

$$\varphi_i(w_{n1}^m, w_{n2}^m, \dots, w_{nn}^m) = \left(1+h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)\frac{v_{ni}^m - v_{ni}^{m-1}}{\tau}$$
$$+\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + \lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(w_{nj}^m\right)^2 + \left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right]\frac{i\pi}{L}\frac{w_{ni}^m - w_{ni}^{m-1}}{2} - f_i^{m-1}. \quad (9.33)$$

(9.30) უტოლობის დასამტკიცებლად მხედველობაში მივიღოთ, რომ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\| \le \|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\|\|\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\| \quad (9.34)$$

და იმ გარემოებას, რომ $\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\|$ ნორმისთვის მიღებული გვაქვს შეფასება. მაშასადამე, (9.30) უტოლობის მისაღებად საკმარისია შევაფასოთ $\|\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\|$, ანუ, როგორც (9.32) ტოლობიდან გამომდინარეობს, საკმარისია შეფასდეს $\|\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\|$, $m = 1, 2, \dots, M-1$. (9.33) ტოლობიდან, (9.18) შეფასებიდან და ზოგიერთი ცნობილი ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\|\varphi(\boldsymbol{w}_n^m)\| = \sum_{i=1}^n |\varphi_i(w_{n1}^m, w_{n2}^m, \dots, w_{nn}^m)|$$

$$\leq \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(|v_{ni}^m| + |v_{ni}^{m-1}|\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1}^n \left(\left(w_{nj}^m\right)^2 + \left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right)\sum_{i=1}^n \frac{i\pi}{L}\left(|w_{ni}^m| + |w_{ni}^{m-1}|\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{i\pi}{L}|w_{ni}^m| + \frac{i\pi}{L}|w_{ni}^{m-1}|\right) + \sum_{i=1}^n |f_i^{m-1}|$$

$$\leq \frac{1}{\tau}\left(\sum_{i=1}^n \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)(v_{ni}^m)^2 + \sum_{i=1}^n \left(1 + h\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\right)(v_{ni}^{m-1})^2\right]\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{L}{4}\sum_{j=1}^n \left(\left(w_{nj}^m\right)^2 + \left(w_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right)\left(\sum_{i=1}^n 1\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 (w_{ni}^m)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 (w_{ni}^{m-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 (w_{ni}^m)^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 (w_{ni}^{m-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\sum_{i=1}^n 1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n (f_i^{m-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{\frac{2}{\tau}\left(n + \frac{1}{6}h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n(n+1)(2n+1)\right)^{\frac{1}{2}} + (\lambda + \bar{\theta}_1)n^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1)\left(n^2 + n - \frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left(\frac{2}{L}\bar{\theta}_0\right)^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n (f_i^{m-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.35)$$

შევაფასოთ $\sum_{i=1}^n (f_i^{m-2})^2$. (2.9), (5.3) და (2.6) თანაფარდობების თანახმად,

$$\sum_{i=1}^{n}(f_i^{m-2})^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}(f_i^{m-2})^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\big((f_i(t_{m-2})\big)^2 = \frac{2}{L}\int_0^L f^2(x,t_{m-2})dx. \qquad (9.36)$$

(9.34), (9.21), (9.35) და (9.36) შეფასებების გამოყენების შედეგად მიიღება (9.30) და (9.31).

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 9.4. ვთქვათ,

$$d_0(\boldsymbol{w}_n^m) = \left\{\widetilde{\boldsymbol{w}_n^m} = \left(\widetilde{w_{nl}^m}\right)_{i=1}^n \middle| \ \left\|\widetilde{\boldsymbol{w}_n^m} - \boldsymbol{w}_n^m\right\| \le \theta\right\} \subset R_n, \qquad (9.37)$$

სადაც $\boldsymbol{w}_n^m = (w_{ni}^m)_{i=1}^n$, ხოლო

$$\theta = 2\left(c_{31}\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{\tau} + c_{32}(n+1)^{\frac{1}{2}} + c_{33}(n+1)^{\frac{5}{2}}\right)\tau^2. \qquad (9.38)$$

მართებულია უტოლობა

$$\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial\widetilde{w}_{nj}^m\partial\widetilde{w}_{nl}^m}\right| \le c_{34}(n+1) + \left(c_{35}\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}}{\tau} + c_{36}(n+1)^{\frac{3}{2}} + c_{37}(n+1)^{\frac{7}{2}}\right)\tau^2, \quad (9.39)$$

$$i,j = 1,2,\dots,n, \quad \widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m \in d_\theta(\boldsymbol{w}_n^m),$$

სადაც

$$c_{34} = 0{,}82(L\bar{\theta}_0)^{\frac{1}{2}}, \qquad c_{3i} = 0{,}75c_{3i-4}, \quad i = 5,6,7. \qquad (9.40)$$

დამტკიცება. ჩვენ განვიხილავთ (9.39) შეფასების მარცხენა მხარის ორ შემთხვევას: როცა $j = i$ და როცა $j \ne i$. როგორც (6.8) და (9.37) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, თუ $j = i$, მაშინ

$$\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial\widetilde{w}_{nl}^m\partial\widetilde{w}_{nl}^m}\right| = \left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial^2 w_{ni}^m}\right| + \sum_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{n}\left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial\widetilde{w}_{nl}^m\partial\widetilde{w}_{nl}^m}\right| = \frac{i\pi}{4}\left(\left|3\widetilde{w}_{ni}^m + w_{ni}^{m-1}\right| + \sum_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{n}\left|\widetilde{w}_{nl}^m\right|\right)$$

$$\le \frac{i\pi}{4}\left(\left|2\widetilde{w}_{nl}^m\right| + \left|w_{ni}^{m-1}\right| + \sum_{l=1}^{n}\left|\widetilde{w}_{nl}^m\right|\right) \le \frac{i\pi}{4}\left(2(\left|\widetilde{w}_{nl}^m\right| + \theta) + \left|w_{ni}^{m-1}\right| + \sum_{l=1}^{n}\left|w_{nl}^m\right| + \theta\right)$$

$$= \frac{i\pi}{4}\left(2\left|w_{ni}^m\right| + \left|w_{ni}^{m-1}\right| + \sum_{l=1}^{n}\left|w_{nl}^m\right| + 3\theta\right), \qquad (9.41)$$

ხოლო, თუ $j \ne i$, ადგილი აქვს

$$\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial\widetilde{w}_{nj}^m\partial\widetilde{w}_{nl}^m}\right| = \left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial^2 w_{nj}^m}\right| + \left|\frac{\partial^2\varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial\widetilde{w}_{nj}^m\partial\widetilde{w}_{nl}^m}\right|$$

$$= \frac{i\pi}{4}\left(\left|\widetilde{w}_{nl}^m + w_{ni}^{m-1}\right| + \left|\widetilde{w}_{nj}^m\right|\right) \le \frac{i\pi}{4}\left(\left|w_{ni}^m\right| + \left|w_{nj}^m\right| + \left|w_{ni}^{m-1}\right| + 2\theta\right). \quad (9.42)$$

ამრიგად, (9.41), (9.42) და (9.18) ფორმულების გამო, $i, j = 1, 2, \dots, n$-თვის სრულდება

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial \widetilde{w}_{nj}^m \partial \widetilde{w}_{nl}^m} \le \frac{i\pi}{4}\left(2|w_{ni}^m| + \left|w_{ni}^{m-1}\right| + \sum_{l=1}^{n}\left|w_{nl}^m\right| + 3\theta\right)$$

$$\le \frac{1}{2} L \sum_{i=1}^{n} \frac{i\pi}{L}\left|w_{nj}^m\right| + \frac{1}{4} L \sum_{i=1}^{n} \frac{i\pi}{L}\left|w_{ni}^{m-1}\right| + \frac{n\pi}{4} L \sum_{l=1}^{n} \frac{L}{l\pi}\frac{l\pi}{L}\left|w_{nl}^m\right| + \frac{3}{4}n\pi\theta$$

$$\le \frac{1}{2} L \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 (w_{ni}^m)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} L \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \left(w_{ni}^{m-1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{n\pi}{4}\frac{L}{\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{l}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 (w_{ni}^m)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}n\pi\theta$$

$$\le \frac{3}{2} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L\overline{\theta}_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{n\pi}{4}\left(\frac{L\overline{\theta}_0}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}n\pi\theta.$$

ვინაიდან

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} n^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3n^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} n\right) \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3n^{\frac{1}{2}} + 1{,}3n\right)$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{9}{4} + 2.3n\right) \le \frac{1}{2\sqrt{2}} 2.3(n+1) \le 0.82(n+1),$$

გვექნება

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial \widetilde{w}_{nj}^m \partial \widetilde{w}_{nl}^m} \le \left(0.82(L\overline{\theta}_0)^{\frac{1}{2}} + 0{,}75\pi\theta\right)(n+1).$$

ახლა (9.39) უტოლობის მისაღებად საკმარისია მხედველობაში მივიღოთ (9.38) და (9.40) განსაზღვრებები.

ლემა დამტკიცებულია.

9.3. კანტოროვიჩის ლემა. აქ ჩამოვაყალიბებთ კანტოროვიჩის (Kantorovich) შედეგს ნიუტონის მეთოდის შესახებ [35]. ძირითადად შევინარჩუნებთ [35] ნაშრომის აღნიშვნებს.

ლ ე მ ა 9 . 5 . ვთქვათ, მოცემულია ალგებრულ ან ტრანსცენდენტურ განტოლებათა სისტემა ნამდვილი კოეფიციენტებით

$$\psi(\boldsymbol{z}) = 0, \quad (9.43)$$

სადაც $\boldsymbol{z} = (z_i)_{i=1}^n$ და ვექტორ-ფუნქცია

$$\psi(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \vdots \\ \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

განსაზღვრულია და უწყვეტია თავისი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად რაღაც Ω არეში, ე. ი. $\Omega \subset R_n$,

$$\psi(\boldsymbol{z}) \in C_2(\Omega). \tag{9.44}$$

დავუშვათ, რომ $\boldsymbol{z}^0$ წერტილი თავის ჩაკეტილ h-მიდამოსთან ერთად ეკუთვნის Ω არეს და

$$d_h(\boldsymbol{z}^0) = \{\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^0\| \le h\} \subset \Omega. \tag{9.45}$$

ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები

I. $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^0$-თვის იაკობის $J(\boldsymbol{z}) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ მატრიცს აქვს შებრუნებული $\Gamma_0 = J^{-1}(\boldsymbol{z}^0)$ მატრიცი, ამასთან

$$\|\Gamma_0\| \le p_0 \,,$$

II. $\|\Gamma_0 \psi(\boldsymbol{z}^0)\| \le q_0 \le h/2$,

III.

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 \psi_i(\boldsymbol{z})}{\partial z_j \partial z_l} \right| \le r,$$

$j = 1, 2, \dots, n,$ და $\boldsymbol{z} \in d_h(\boldsymbol{z}^0)$,

IV. p_0, q_0, r და n აკმაყოფილებს უტოლობას

$$s_0 = 2np_0q_0r \le 1.$$

მაშინ $\boldsymbol{z}_0$ საწყისი მიახლოებისათვის ნიუტონის პროცესი

$$\boldsymbol{z}^{k+1} = \boldsymbol{z}^k - \mathrm{J}^{-1}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{k}})\psi(\boldsymbol{z}^k), \quad k = 0, 1, \dots ,$$

კრებადია ზღვრული $\boldsymbol{z}^* = \lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{z}^k$ ვექტორისაკენ, რომელიც არის (9.43) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი

$$\|\boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{z}^0\| \le 2q_0$$

არეში. იტერაციული პროცესის ცდომილებისათვის კი მართებულია შეფასება

$$\|\boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{z}^0\| \le q_0 s_0^{2^k - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots .$$

9.4. თეორემა კრებადობის შესახებ. გამოვიყენოთ (6.10) პროცესის მიმართ ლემა 9.5. (6.8) ტოლობიდან ვასკვნით, რომ (9.44) პირობა სრულდება $\Omega = R_n$ არეში. (9.45) არის მაგივრობას გვიწევს შემდეგი არე

$$d_\theta(\boldsymbol{w}_{n0}^m) = \left\{ \widetilde{\boldsymbol{w}_n^m} = \left(\widetilde{w_{ni}^m}\right)_{i=1}^n \mid \left\|\widetilde{\boldsymbol{w}_n^m} - w_{n0}^m\right\| \le \theta \right\} \in R_n,$$

აქ $\theta = 2q_0$, სადაც q_0 პარამეტრის ფორმულა მოცემულია ქვემოთ.

(9.11), (9.21) და (9.30) თანაფარდობების გამო სრულდება I და II პირობა. სახელდობრ,

I.

$$\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\| \le p_0, \tag{9.46}$$

$$p_0 = c_{30}\tau^2,$$

II.

$$\|J^{-1}(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\varphi(\boldsymbol{w}_{n0}^m)\| \le q_0,$$

$$q_0 = \left(c_{31}\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{\tau} + c_{32}(n+1)^{\frac{1}{2}} + c_{33}(n+1)^{\frac{5}{2}} \right)\tau^2. \tag{9.47}$$

ახლა ყურადღება შევაჩეროთ III პირობაზე. (9.37), (9.39), (9.38) ფორმულებს მივყავართ დასკვნამდე, რომ

III.

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 \varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m)}{\partial \widetilde{w}_{nj}^m \partial \widetilde{w}_{nl}^m} \right| \le r, \tag{9.48}$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad \widetilde{\boldsymbol{w}}_n^m \in d_\theta(\boldsymbol{w}_n^m),$$

$$r = c_{34}(n+1) + \left(c_{35}\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}}{\tau} + c_{36}(n+1)^{\frac{3}{2}} + c_{37}(n+1)^{\frac{7}{2}} \right)\tau^2.$$

ჩამოვაყალიბოთ დებულება იტერაციული პროცესის (9.3) კრებადობისა და სიზუსტის შესახებ. ამისათვის გამოვიყენოთ ლემა 9.5, ფორმულა (9.6) და (9.46)-(9.48) უტოლობები. შედეგი იქნება ასეთი

თ ე ო რ ე მ ა 9 . 1 . ვთქვათ, τ ბიჯი აკმაყოფილებს მოთხოვნას

$$s_0 = 2c_{30}\tau^4 n$$

$$\times \prod_{l=0}^{1} \left(lc_{34}(n+1) + \tau^2 \left(c_{3(4l+1)}\frac{(n+1)^{l+\frac{3}{2}}}{\tau} + c_{3(4l+2)}(n+1)^{l+\frac{1}{2}} + c_{3(4l+3)}(n+1)^{l+\frac{5}{2}} \right) \right)$$

$$\leq 1. \tag{9.49}$$

მაშინ ნიუტონის იტერაციული პროცესი (9.3) კრებადია, მისი ზღვრული $\boldsymbol{u}_n^m = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_{nk}^m$ ვექტორი წარმოადგენს (9.4) სისტემის ამონახსნს.

პროცესის ცდომილებისათვის მართებულია შეფასება

$$\|\Delta u_{nk}^m(x)\| = \|u_{nk}^m(x) - u_n^m(x)\| \leq c_3 s_0^{2^k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, \tag{9.50}$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

სადაც

$$c_3 = \frac{(2L^3)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\left(c_{31}\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{\tau} + c_{32}(n+1)^{\frac{1}{2}} + c_{33}(n+1)^{\frac{5}{2}}\right)\tau^2, \tag{9.51}$$

ხოლო $c_{3l},\ l = 0, 1, \dots, 7$, განსაზღვრულია (9.22), (9.31) და (9.40) ფორმულებით.

10. ალგორითმის სრული ცდომილება. აქ შევაფასებთ ალგორითმის სრულ ცდომილე-ბას.

10.1. სრული ცდომილების განსაზღვრება. შერჩეული n და τ პარამეტრებისთვის $t = t_m$ წერტილში ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას იტერაციის k-ბიჯზე წარმო-ადგენს $u_{nk}^m(x)$ ფუნქცია. ამონახსნის შესაბამისი ზუსტი მნიშვნელობა არის $u(x, t_m)$ ფუნქცია. აქედან გამომდინარე, ბუნებრივი იქნება ალგორითმის სრულ ცდომილებად ჩავთვალოთ ფუნქცია

$$\Delta z_{nk}^m(x) = u_{nk}^m(x) - u(x, t_m). \tag{10.1}$$

(10.1) და (9.6), (8.1), (7.1) განსაზღვრებების თანახმად,

$$\Delta z_{nk}^m(x) = \left(u_{nk}^m(x) - u_n^m(x)\right) + \left(u_n^m(x) - u_n(x, t_m) + \left(u_n(x, t_m) - u(x, t_m)\right)\right)$$
$$= \Delta u_{nk}^m(x) + \Delta u_n^m(x) + \Delta u_n(x, t_m). \tag{10.2}$$

10.2. ალგორითმის სრული ცდომილების შეფასება. (10.2) და (10.1) გამოსახულებები-დან გამომდინარეობს

$$\|\Delta z_{nk}^m(x)\| = \|u_{nk}^m(x) - u(x, t_m)\| \leq \|\Delta u_n(x, t_m)\| + \|\Delta u_n^m(x)\| + \|\Delta u_{nk}^m(x)\|. \tag{10.3}$$

(10.3) ფორმულის $\|\Delta u_n(x, t_m)\|$, $\|\Delta u_n^m(x)\|$, $\|\Delta u_{nk}^m(x)\|$ წევრების შეფასების მიზ-ნით გამოვიყენოთ თეორემები 7.1, 8.1, 9.1, შესაბამისად. შედეგად მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

თ ე ო რ ე მ ა 10.1. ვთქვათ, $u^q(x)$, $q = 0, 1$, და $f(x,t)$ ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს (2.1) პირობას და (4.1) ჯამის კოეფიციენტებისათვის სრულდება მოთხოვნა

$$u_{ni}(t) \in C_4[0,T], \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

დავუშვათ, რაიმე $p_3 > 1$ რიცხვისათვის სხვაობიანი სქემის τ ბიჯი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\tau < \frac{2}{\alpha_2}\theta_0\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)(\theta_0 + \bar{\theta}_0)$$

და, გარდა ამისა,

$$s_0 = 2c_{30}\tau^4 n \prod_{l=0}^{1}\left(lc_{34}(n+1) + \tau^2\left(c_{3(4l+1)}\frac{(n+1)^{l+\frac{3}{2}}}{\tau} + c_{3(4l+2)}(n+1)^{l+\frac{1}{2}} + c_{3(4l+3)}(n+1)^{l+\frac{5}{2}}\right)\right) \leq 1,$$

სადაც დადებითი სიდიდეები α_2, θ_0, $\bar{\theta}_0$, c_{3l}, $l = 0, 1, \ldots, 7$, განისაზღვრება (7.28), (8.21), (8.23) და (9.22), (9.31), (9.40) ტოლობებით. მაშინ ალგორითმის სრული ცდომილებისთვის მართებულია შეფასება

$$\|\Delta z_{nk}^m(x)\| = \|u_{nk}^m(x) - u(x,t_m)\| \leq c_1\sum_{p=1}^{2}\left(\sum_{q=0}^{1}\sum_{r=1}^{2}\left\|\frac{d^{r-q}\Delta_n u^q(x)}{dx^{r-q}}\right\|^p + \left(\int_0^T\|\Delta_n f(x,t)\|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right) + c_2\tau^2 + c_3 s_0^{2^k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \ldots.$$

აქ c_l, $l = 1, 2, 3$, კოეფიციენტები განისაზღვრება (7.51), (8.73), (9.51) ტოლობებით, ხოლო $\Delta_n u^q(x)$, $q = 0, 1$, და $\Delta_n f(x,t)$ ფუნქციებისთვის გვაქვს

$$\Delta_n u^q(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i^q \sin\frac{i\pi x}{L}, \qquad \Delta_n f(x,t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}.$$

10.3. მაგალითი. განვიხილოთ (1.1), (1.2) ამოცანის ერთი ვარიანტი. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x,t) - \left(\frac{1}{2} + \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \qquad (10.4)$$

$$0 < x < 1, \qquad 0 < t \le 1,$$

სადაც

$$f(x,t) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2 + c_3(t)x^3 + c_4(t)x^4,$$

$$c_0(t) = 24(1+3t+t^2), \;\; c_1(t) = 14 + 12\left[\frac{1}{2} + \frac{17}{35}(1+3t+t^2)^2\right](1+3t+t^2),$$

$$c_2(t) = -c_1(t) + 2, \quad c_3(t) = -4, \quad c_4(t) = 2,$$

და საწყის-სასაზღვრო პირობები

$$\begin{gathered} u(x,0) = x^4 - 2x^3 + x\,, \quad \frac{\partial u}{dt}(x,0) = 3(x^4 - 2x^3 + x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{dx^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{dx^2}(1,t) = 0. \end{gathered} \tag{10.5}$$

დასმული (10.4), (10.5) ამოცანის ზუსტი ამონახსნია ფუნქცია

$$u(x,t) = (x^4 - 2x^3 + x)(1+3t+t^2).$$

ალგორითმი გამოყენებულია პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის: გალიორკინის (4.1) მიახლოებაში $n = 5$, (5.1), (5.2) სხვაობიან სქემაში $\tau = 0{,}1$, ყოველი ფიქსირებული t_m კვანძისთვის ნიუტონის იტერაციული (9.3) პროცესის ბიჯების რაოდენობა $k = 7$. ცხრილი 1-ში მოყვანილია მიახლოებითი ამონახსნის u_{nik}^m კოეფიციენტებისა და ზუსტი ამონახსნის $u_i(t_m)$ კოეფიციენტების მნიშვნელობები.

ცხრილი 1

t_m	მიახლოებითი ამონახსნის u_{nik}^m კოეფიციენტები					ზუსტი ამონახსნის $u_i(t_m)$ კოეფიციენტები				
0.2	0.5084	0	0.0021	0	0.0002	0.5145	0	0.0021	0	0.0002
0.3	0.6162	0	0.0026	0	0.0002	0.6243	0	0.0026	0	0.0002
0.4	0.7318	0	0.0031	0	0.0002	0.7403	0	0.0030	0	0.0002
0.5	0.8554	0	0.0036	0	0.0003	0.8627	0	0.0036	0	0.0003
0.6	0.9869	0	0.0041	0	0.0004	0.9913	0	0.0041	0	0.0003
0.7	1.1254	0	0.0046	0	0.0004	1.1262	0	0.0046	0	0.0004
0.8	1.2694	0	0.0052	0	0.0004	1.2674	0	0.0052	0	0.0004
0.9	1.4174	0	0.0058	0	0.0005	1.4148	0	0.0058	0	0.0005
1.0	1.5688	0	0.0065	0	0.0005	1.5685	0	0.0065	0	0.0005

შევნიშნოთ, რომ ზუსტი ამონახსნის $u_i(t_m),\ i \geq 1$, კოეფიციენტებისთვის მართებულია ფორმულა

$$u_i(t_m) = \begin{cases} \dfrac{96}{(i\pi)^5}(1 + 3t_m + t_m^2), & \text{თუ } i \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{თუ } i \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ცხრილი 2-ში მოყვანილია ალგორითმის სრული ცდომილების ნორმის მნიშვნელობები.

ცხრილი 2

t_m	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\|\|\Delta z_{nk}^m(x)\|\|$	0.0044	0.0058	0.0061	0.0053	0.0033	0.0007	0.0016	0.0019	0.0004

პროგრამა შედგენილია MATLAB R2010a ენაზე.

დასასრულს, შევნიშნოთ, რომ ალგორითმის სიზუსტის გაუმჯობესებისთვის საჭიროა ერთდროულად მოხდეს გალიორკინის გაშლაში n პარამეტრისა და ნიუტონის პროცესში ჩატარებული იტერაციების k რაოდენობის გაზრდა და, ამავე დროს, სხვაობიანი სქემის τ ბიჯის შემცირება.

საჭირო სიზუსტის მისაღებად ამას შეიძლება მოჰყვეს ჩასატარებელი ოპერაციების რიცხვის მკვეთრი ზრდა. აქედან გამომდინარე, პერსპექტიულად გვეჩვენება პარალელური ალგორითმების გამოყენება. აღნიშნული მიდგომა ერთი კლასის განტოლებებისთვის გამოკვლეულია მელაძისა (Meladze) და დავითაშვილის (Davitashvili) [49] მიერ.

თავი II

რიცხვითი ალგორითმი ტიმოშენკოს ძელის არაწრფივი სისტემისათვის

რეზიუმე. განხილულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ძელის დინამიკური სისტემისათვის

$$w_{tt} = \left(cd - a + b \int_0^1 w_x^2 \, dx \right) w_{xx} - cd\psi_x ,$$

$$\psi_{tt} = c\psi_{xx} - c^2 d(\psi - w_x).$$

ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენებულია ერთი მიახლოებითი ალგორითმი. ამ ალგორითმის შემადგენელი ნაწილებია: სასრულ ელემენტთა მეთოდი და კრანკ-ნიკოლსონის (Crank-Nicolson) ტიპის არაცხადი სიმეტრიული სქემა, რომელთა საშუალებით ხორციელდება დისკრეტიზება სივრცული და დროის ცვლადების მიმართ. ამის შემდეგ მიღებული არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენება პიკარის (Picard) ტიპის იტერაციული პროცესი. შეფასებულია ალგორითმის სამივე ნაწილის ცდომილება, რის შედეგად მიღებულია მისი სრული ცდომილების შეფასება. ამოხსნილია ტესტური მაგალითები.

ნაწილი I. ამოცანის დასმა

1. განტოლებათა სისტემა და საწყის-სასაზღვრო პირობები. [60], [61] სტატიებში განხილულია ამოცანა ძელის არაწრფივი რხევის შესახებ. შესაბამისად აქ გამოვიყენებთ ტიმოშენკოს (Timoshenko) ცნობილ მოდელს [70]. კირხჰოფ-ლავეს (Kirchhoff-Love) კლასიკურ მოდელისგან განსხვავებით, ტიმოშენკოს მოდელში გათვალისწინებულია განივი ძალა და ბრუნვითი ინერცია, რაც არსებითად მნიშვნელოვანია მრავალი ამოცანის ამოხსნის დროს [25], [26].

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{gathered} w_{tt} = \left(cd - a + b \int_0^1 w_x^2 \, dx \right) w_{xx} - cd\psi_x , \\ \psi_{tt} = c\psi_{xx} - c^2 d(\psi - w_x), \\ 0 < x < 1, \;\; 0 < t \le T, \end{gathered} \tag{1.1}$$

საწყის-სასაზღვრო პირობებით

$$
\begin{gathered}
w_t(x,0)=w^1(x), \quad w(x,0)=w^2(x)\,, \\
\psi_t(x,0)=\psi^1(x), \quad \psi(x,0)=\psi^2(x), \\
w_t(0,t)=w_t(1,t)=0, \quad \psi_t(0,t)=\psi_t(1,t)=0, \\
0\le x\le 1, \ \ 0\le t\le T.
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

საძიებელი $w(x,t)$ და $\psi(x,t)$ ფუნქციები ძელის შუა ხაზის განივი გადახრა და განიკვეთის ბრუნვითი გადაადგილებაა, შესაბამისად. (1.2)-ში w^l , ψ^l მოცემული ფუნქციებია, ამასთან,

$$
w^l(x),\ \psi^l(x)\ \in W_2^{l+1}(0,1), \quad l=1,2. \tag{1.3}
$$

(1.1)-ში

$$
a,b,c,d>0, \quad cd-a>0, \tag{1.4}
$$

სადაც

$$
a=\frac{Al\Delta}{I_1}, \quad b=\frac{Al^2}{2I_1}\,, \quad c=\frac{Al^2}{I_2}\,, \quad d=\frac{GI_2}{EI_1}, \tag{1.5}
$$

E არის იუნგის მოდული, G ძვრის მოდულია, A განივკვეთის ფართობია, $l=1$ ძელის სიგრძეა, I_1 ძელის შუახაზის პერპენდიკულარული ღერძის მიმართ განივკვეთის ინერციის მომენტია, I_2 – განივკვეთის პოლარული მომენტი და Δ – ძელის ბოლოების დამოკლება.

(1.5) საფუძველზე ვასკვნით, რომ (1.4)-ის მეორე პირობა წარმოადგენს ბუნებრივ მოთხოვნას თხელი ზომიერად შეკუმშული ძელისათვის, ვინაიდან ეს გამოსახულება $\Delta<\frac{lG}{E}$ პირობის ეკვივალენტურია.

(1.1) სისტემაში არაწრფივი წევრის უკუგდების შედეგად მიიღება ტიმოშენკოს (Timoshenko) დინამიკური ძელის წრფივი სისტემა [71], რომლისთვის ამონახსნის არსებობა გამოკვლეულია კიმისა (Kim) და რენარდის (Renardy) მიერ [40]. ამ სისტემისთვის და მისი ზოგიერთი განზოგადებისთვის გამოკვლეულია რიცხვითი მეთოდების თვისებები.

2. სისტემის დაყვანა პირველი რიგის განტოლებათა სისტემაზე. განვიხილოთ ფუნქციები

$$
u(x,t),\ v(x,t),\ \ f(x,t),\ \ \varphi(x,t),\ \ \psi(x,t)\,, \tag{2.1}
$$

რომელთა შორის პირველი ოთხი ახალი ფუნქციაა. მათ აქვს შემდეგი სახე

$$
u=w_t, \quad v=w_x, \quad f=\ \psi_t, \qquad \varphi=\psi_x. \tag{2.2}
$$

(1.1)-ისა და (2.2)-ის გამოყენების შედეგად მიიღება განტოლებათა სისტემა (2.1) ფუნქციების მიმართ

$$
\begin{gathered}
u_t = \left(cd - a + b \int_0^1 v^2\, dx \right) v_x - cd\varphi, \\
v_t = u_x, \quad f_t = c\varphi_x - c^2 d(\psi - v), \\
\varphi_t = f_x, \quad \psi_t = f, \\
0 < x < 1, \;\; 0 < t \le T.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

შევავსოთ ეს სისტემა საწყისი და სასაზღვრო პირობებით

$$
\begin{gathered}
u(x,0) = w^1(x), \quad v(x,0) = w_x^2(x), \quad f(x,0) = \psi^1(x), \\
\varphi(x,0) = \psi_x^2(x), \;\; \psi(x,0) = \psi^2(x), \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; f(0,t) = f(1,t) = 0, \\
0 \le x \le 1, \;\; 0 \le t \le T.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

ამრიგად, (1.1), (1.2) ამოცანის ნაცვლად მიღებულია საწყის-სასაზღვრო (2.3), (2.4) ამოცანა. ქვემოთ განვიხილავთ ამ ამოცანის ამოხსნის საკითხს.

ნაწილი II. ალგორითმი

3. სასრულ ელემენტთა მეთოდი. მოვახდინოთ (2.3), (2.4) ამოცანის დისკრეტიზება სივრცული ცვლადის მიმართ, რისთვისაც გამოვიყენოთ სასრულ ელემენტთა მეთოდი.

დავუშვათ, $[0,1]$ ინტერვალი დაფარულია ბადით $h = 1/N$ ბიჯით. ყოველ $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, კვანძს შევუსაბამოთ ბაზისური ფუნქცია

$$
\omega_{hi}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1},\; x_i), \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i,\; x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1},\; x_{i+1}), \end{cases}
$$

$$
i = 1, 2, \dots, N-1,
$$

$$
\omega_{h0}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & x \in (x_0,\; x_1), \\ 0, & x \notin (x_0,\; x_1), \end{cases} \qquad \omega_{hN}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h}, & x \in (x_{N-1},\; x_N), \\ 0, & x \notin (x_{N-1},\; x_N). \end{cases}
$$

$(\;,\;)$-ით და$\|\cdot\|$-ით აღვნიშნოთ სკალარული ნამრავლი და ნორმა $L^2(0,1)$ სივრცეში, შესაბამისად. (2.3), (2.4) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i(t)\,\omega_{hi}, \quad v_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N} v_j(t)\,\omega_{hj},$$
$$f_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(t)\,\omega_{hi}, \quad \varphi_h(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(t)\,\omega_{hj}, \quad \psi_h(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \psi_j(t)\,\omega_{hj}. \tag{3.1}$$

(3.1)-ში შემავალი ფუნქციები

$$u_i(t), \quad v_j(t), \quad f_i(t), \quad \varphi_j(t), \quad \psi_j(t), \tag{3.2}$$
$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

განისაზღვრება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემით

$$(u_{ht}, \omega_{hi}) = \left(\left(cd - a + b \int_0^1 v_h^2\, dx \right) v_{hx} - cd\varphi_h, \omega_{hi} \right),$$
$$\left(v_{ht}, \omega_{hj}\right) = \left(u_{hx}, \omega_{hj}\right), \quad (f_{ht}, \omega_{hi}) = (c\varphi_{hx} - c^2 d(\psi_h - v_h), \omega_{hi}),$$
$$\left(\varphi_{ht}, \omega_{hj}\right) = \left(f_{hx}, \omega_{hj}\right), \quad \left(\psi_{ht}, \omega_{hj}\right) = \left(f_h, \omega_{hj}\right), \tag{3.3}$$
$$0 < t \le T,$$

და საწყისი პირობებით

$$u_i(0) = w^1(x_i), \quad v_j(0) = w_x^2(x_j), \quad f_i(0) = \psi^1(x_i),$$
$$\varphi_j(0) = \psi_x^2(x_j), \quad \psi_j(0) = \psi^2(x_j). \tag{3.4}$$

(3.3) და (3.4)-ში $i = 1, 2, \dots, N-1, \ j = 0, 1, \dots, N$.

შემოვიღოთ რამდენიმე აღნიშვნა. λ_h და μ_h

$$\lambda_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(t)\omega_{hi}, \quad \mu_h(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \mu_j(t)\omega_{hj} \tag{3.5}$$

სახის ფუნქციებს შევუსაბამოთ ვექტორები

$$\boldsymbol{\lambda}_h(t) = \left(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{N-1}(t)\right), \quad \boldsymbol{\mu}_h(t) = \left(\mu_0(t), \mu_1(t), \dots, \mu_N(t)\right). \tag{3.6}$$

აქ და ქვემოთ სვეტი-ვექტორი წერია სტრიქონის სახით ტრანსპონირების სიმბოლოს გარეშე. იშვიათ შემთხვევებში ვექტორის ტრანსპონირებას აღვნიშნავთ ´ სიმბოლოთი. იგივე სიმბოლოს გამოვიყენებთ მატრიცის ტრანსპონირების აღნიშვნის მიზნით.

ახლა (3.3), (3.4) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს მატრიცული სახით

$$M \frac{d\boldsymbol{u}_h(t)}{dt} = \left(cd - a + bh\boldsymbol{v_h}(t)' K \boldsymbol{v}_h(t)\right) Q \boldsymbol{v}_h(t) - cdL\boldsymbol{\varphi}_h(t), \tag{3.7a}$$

$$K \frac{d\boldsymbol{v}_h(t)}{dt} = -Q' \boldsymbol{u}_h(t), \tag{3.7b}$$

$$M\frac{d\boldsymbol{f}_h(t)}{dt} = cQ\boldsymbol{\varphi}_h(t) - c^2 dL\big(\boldsymbol{\psi}_h(t) - \boldsymbol{v}_h(t)\big), \tag{3.7c}$$

$$K\frac{d\boldsymbol{\varphi}_h(t)}{dt} = -Q'\boldsymbol{f}_h(t), \tag{3.7d}$$

$$K\frac{d\boldsymbol{\psi}_h(t)}{dt} = -L'\boldsymbol{f}_h(t), \tag{3.7e}$$

რომელთათვის $0 < t \le T$, და საწყისი პირობებით

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{w}^1, \quad \boldsymbol{v}_h(0) = \boldsymbol{w}_x^2, \quad \boldsymbol{f}_h(0) = \boldsymbol{\psi}^1, \\ \boldsymbol{\varphi}_h(0) = \boldsymbol{\psi}_x^2, \quad \boldsymbol{\psi}_h(0) = \boldsymbol{\psi}^2.\end{gathered} \tag{3.8}$$

(3.7)-ში K, L, M და Q, შესაბამისად, $(N+1)\times(N+1)$, $(N-1)\times(N+1)$, $(N-1)\times(N-1)$ და $(N-1)\times(N+1)$ რიგის შემდეგი სახის მატრიცებია

$$K = \frac{1}{h}\big((\omega_{hi},\omega_{hi})\big)_{0\le i,j\le N} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & & & & & 0 \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ 0 & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{3.9a}$$

$$L = \frac{1}{h}\Big(\big(\omega_{hi},\omega_{hj}\big)\Big)_{0\le i\le N-1,\ 0\le j\le N} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & 0 \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ 0 & & & & \cdot & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.9b}$$

$$M = \frac{1}{h}\Big(\big(\omega_{hi},\omega_{hj}\big)\Big)_{1\le i,j\le N-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}, \tag{3.9c}$$

$$Q = -\frac{1}{h}\Big(\big(\omega_{hix},\omega_{hj}\big)\Big)_{1\le i\le N-1, 0\le j\le N} = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & 0 \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ 0 & & & & \cdot & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9d}$$

(3.8)-ში

$$\begin{gathered}\boldsymbol{w}^1 = \big(w^1(x_1), w^1(x_2), \dots, w^1(x_{N-1})\big), \ \boldsymbol{w}_x^2 = \big(w_x^2(x_0), w_x^2(x_1), \dots, w_x^2(x_N)\big), \\ \boldsymbol{\psi}^l = \Big(\psi^l(x_{2-l}), \psi^l(x_{3-l}), \dots, \psi^l(x_{l+N-2})\Big), \qquad l = 1, 2, \\ \boldsymbol{\psi}_x^2 = \big(\psi_x^2(x_0), \psi_x^2(x_1), \dots, \psi_x^2(x_N)\big).\end{gathered} \tag{3.10}$$

(3.7)-ისა და (3.8)-ის გარდა დაგვჭირდება სისტემის უფრო მოკლე ჩანაწერი. მხედველობაში გვაქვს შემდეგი განტოლება

$$A\frac{d\boldsymbol{y}_h(t)}{dt} = \Big(B + C\big(\boldsymbol{v}_h(t)\big)\Big)\boldsymbol{y}_h(t), \tag{3.11}$$

$$0 < t \le T,$$

და საწყისი პირობა

$$\boldsymbol{y}_h(0) = \boldsymbol{g}_h. \tag{3.12}$$

აქ გამოყენებულია ვექტორები

$$\boldsymbol{y}_h(t) = \big(\boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{v}_h(t), \boldsymbol{f}_h(t), \boldsymbol{\varphi}_h(t), \boldsymbol{\psi}_h(t)\big), \tag{3.13a}$$

$$\boldsymbol{g}_h = (\boldsymbol{w}^1, \boldsymbol{w}_x^2, \boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}_x^2, \boldsymbol{\psi}^2), \tag{3.13b}$$

და მეხუთე რიგის ბლოკური მატრიცები

$$A = \begin{pmatrix} M & & & & \\ & 2K & & 0 & \\ & & M & & \\ & 0 & & 2K & \\ & & & & 2K \end{pmatrix}, \tag{3.14a}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (cd-a)Q & 0 & -cdL & 0 \\ -2Q' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2dL & 0 & cQ & -c^2dL \\ 0 & 0 & -2Q' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2L' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.14b}$$

$$C(v) = bhv'Kv \begin{pmatrix} 0 & Q & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}, \quad v \in R^{N+1}. \tag{3.14c}$$

(3.13)-ში $\boldsymbol{y}_h(t)$ და $\boldsymbol{g}_h$ ვექტორები შეიცავს სასრულ ელემენტიანი (3.11), (3.12) სისტემის ამონახსნებს $0 < t \le T$ და $t = 0$-ში, შესაბამისად. (3.14)-ში 0-ები წარმოადგენს მართკუთხა ნულოვან მატრიცებს, რომელთა რიგები განისაზღვრება შემდეგი წესით: მატრიცის სტრიქონების (სვეტების) რაოდენობა $N-1$-ია, თუ მატრიცი მდებარეობს შესაბამისი ბლოკური მატრიცის პირველ ან მესამე სტრიქონში (სვეტში), და $N+1$-ის წინააღმდეგ შემთხვევაში.

4. სხვაობიანი სქემა. ავაგოთ (3.7), (3.8) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი. $[0, T]$ ინტერვალზე შემოვიღოთ ბადე $\tau = \frac{T}{P}$ ბიჯით, $0 < \tau < 1$, და $t_n = n\tau$ კვანძებით. n-ურ შრეზე, ე. ი. $t = t_n$-თვის, (3.6) ვექტორების მიახლოებითი მნიშვნელობები აღვნიშნოთ $\boldsymbol{\lambda}_h^n$-ით და $\boldsymbol{\mu}_h^n$-ით, $n = 0,1,\dots,P$. გამოვიყენოთ კრანკ-ნიკოლსონის (Crank-Nicolson) ტიპის სიმეტრიული სქემა

$$M(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_h^{n-1}) = \frac{\tau}{4}\Big(2(cd-a) + bh((\boldsymbol{v}_h^n)' K \boldsymbol{v}_h^n + (\boldsymbol{v}_h^{n-1})' K \boldsymbol{v}_h^{n-1})\Big) Q(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1})$$

$$-\frac{\tau cd}{2} L(\boldsymbol{\varphi}_h^n + \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}), \tag{4.1a}$$

$$2K(\boldsymbol{v}_h^n - \boldsymbol{v}_h^{n-1}) = -\tau Q'(\boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1}), \tag{4.1b}$$

$$M(\boldsymbol{f}_h^n - \boldsymbol{f}_h^{n-1}) = \frac{\tau c}{2} Q(\boldsymbol{\varphi}_h^n + \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}) - \frac{\tau c^2 d}{2} L(\boldsymbol{\psi}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^{n-1} - \boldsymbol{v}_h^n - \boldsymbol{v}_h^{n-1}), \tag{4.1c}$$

$$2K(\boldsymbol{\varphi}_h^n - \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}) = -\tau Q'(\boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1}), \tag{4.1d}$$

$$2K(\boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^{n-1}) = -\tau L'(\boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1}), \tag{4.1e}$$

$n = 1, 2, \dots, P$, საწყისი პირობებით

$$\boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{w}^1, \quad \boldsymbol{v}_h^0 = \boldsymbol{w}_x^2, \quad \boldsymbol{f}_h^0 = \boldsymbol{\psi}^1, \quad \boldsymbol{\varphi}_h^0 = \boldsymbol{\psi}_x^2, \quad \boldsymbol{\psi}_h^0 = \boldsymbol{\psi}^2. \tag{4.2}$$

შემოვიღოთ ვექტორი

$$\boldsymbol{y}_h^n = (\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h^n, \boldsymbol{f}_h^n, \boldsymbol{\varphi}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h^n). \tag{4.3}$$

(4.3), (3.14) და (3.13b) ფორმულების გამოყენების შედეგად (4.1) სისტემა გადაიწერება შემდეგი სახით

$$A\frac{\boldsymbol{y}_h^n - \boldsymbol{y}_h^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}\left(B + \frac{1}{2}\Big(C(\boldsymbol{v}_h^n) + C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\Big)\right)(\boldsymbol{y}_h^n + \boldsymbol{y}_h^{n-1}), \tag{4.4}$$

ხოლო (4.2) შემდეგნაირად

$$\boldsymbol{y}_h^0 = \boldsymbol{g}_h. \tag{4.5}$$

5. იტერაციული პროცესი. განვიხილოთ (4.4), (4.5) ამოცანის ამოხსნის საკითხი. ვთქვათ, გამოთვლას ვაწარმოებთ შრიდან შრეზე გადასვლისას. თუ $\boldsymbol{y}_h^{n-1}$ უკვე ცნობილია, მაშინ ამოცანა დაიყვანება (4.4)-დან $\boldsymbol{y}_h^n$-ის მოძებნაზე. ამისათვის გამოვიყენოთ პიკარის (Picard) ტიპის იტერაციული პროცესი

$$A\boldsymbol{y}_h^{n,m} = A\boldsymbol{y}_h^{n-1} + \frac{\tau}{2}\left(B + \frac{1}{2}\Big(C\big(\boldsymbol{v}_h^{n,m-1}\big) + C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\Big)\right)\big(\boldsymbol{y}_h^{n,m-1} + \boldsymbol{y}_h^{n-1}\big), \tag{5.1}$$

$m = 1, 2, \dots$. აქ

$$\boldsymbol{y}_h^{n,m} = \big(\boldsymbol{u}_h^{n,m}, \boldsymbol{v}_h^{n,m}, \boldsymbol{f}_h^{n,m}, \boldsymbol{\varphi}_h^{n,m}, \boldsymbol{\psi}_h^{n,m}\big) \tag{5.2}$$

არის $\boldsymbol{y}_h^n$, $m = 0, 1, \dots,$ ვექტორის m-ური იტერაციული მიახლოება, ამასთან, $\boldsymbol{u}_h^{n,m}$, $\boldsymbol{f}_h^{n,m} \in R^{N-1}$, $\boldsymbol{\varphi}_h^{n,m}, \boldsymbol{\psi}_h^{n,m} \in R^{N+1}$. იმისათვის, რომ თავი ავარიდოთ უმნიშვნელო ხასიათის დეტალებით გამოწვეულ სიძნელეებს, დაუშვათ, რომ $\boldsymbol{y}_h^{n-1}$ მიღებულია ისეთი სიზუსტით, რომ შესაძლებელია შესაბამისი ცდომილების უგულებელყოფა. დავუშ-

ვათ ასევე, რომ $\boldsymbol{y}_h^{n-1}$ გამოიყენება იტერაციის საწყის მიახლოებად მეზობელ n-ურ შრეზე. ამრიგად, ვიგულისხმოთ, რომ

$$\boldsymbol{y}_h^{n,0} = \boldsymbol{y}_h^{n-1}. \tag{5.3}$$

ნაწილი III. ალგორითმის ცდომილება

6. დამხმარე დებულებები

6.1. უტოლობები K, M და Q მატრიცებისთვის. შემოვიღოთ ვექტორებისთვის სკალარული ნამრავლი და ნორმა. ვთქვათ, λ და μ ერთნაირი განზომილების ვექტორებია, რომელთა l-ური კომპონენტებია λ_l და μ_l. მაშინ სკალარული ნამრავლია

$$(\lambda,\mu)_h = h\sum_l \lambda_l\mu_l\,,$$

ხოლო ნორმა განისაზღვრება ფორმულით

$$\|\lambda\|_h = (\lambda,\lambda)_h^{\frac{1}{2}}.$$

თუ W სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა, რომლის რიგი შეესაბამება λ ვექტორის განზომილებას, მაშინ ენერგეტიკული ნორმა ტოლია

$$\|\lambda\|_{W,h} = (W\lambda,\lambda)_h^{\frac{1}{2}}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ ვექტორის განზომილება არ აისახება სკალარული ნამრავლის და ნორმის აღნიშვნებზე.

გამოვიყენოთ K, M და Q მატრიცების (3.9a), (3.9c) და (3.9d) აღნიშვნები და გერშგორინის (Gershgorin)-ის თეორემა [31]. შედეგად ჯერ მივიღებთ

$$6^{-\frac{1}{2}}\|\lambda\|_h \le \|\lambda\|_{K,h} \le \|\lambda\|_h\,, \qquad \lambda\in R^{N+1}, \tag{6.1a}$$

$$3^{-\frac{1}{2}}\|\lambda\|_h \le \|\lambda\|_{M,h} \le \|\lambda\|_h\,, \qquad \lambda\in R^{N-1}. \tag{6.1b}$$

იგივე მიდგომით, QQ' მატრიცის გამოყენების შედეგად, ვაფასებთ

$$\|Q\|_h \le \frac{1}{h}. \tag{6.1c}$$

6.2. უტოლობები A, B და C ბლოკური მატრიცებისთვის. ჯერ დავამტკიცოთ A და B მატრიცებთან დაკავშირებული უტოლობები.

ლ ე მ ა 6 . 1 . მართებულია თანაფარდობები

$$\|A\|_h \le 2,\ \ \|A^{-1}\|_h \le 3, \tag{6.2a}$$

$$\|B\|_h \le \gamma, \tag{6.2b}$$

სადაც

$$\gamma = \max^{\frac{1}{2}}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \tag{6.3}$$

და

$$\gamma_1 = 2c^4d^2 + \frac{(cd-a)^2}{h^2} + \frac{5cd}{6h}(c^2+cd-a), \quad \gamma_2 = 4\left(1+\frac{1}{h^2}\right),$$
$$\gamma_3 = c^2d^2 + \frac{c^2}{h^2} + \frac{5cd}{6h}(2c^2+cd-a).$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ (6.1a), (6.1b) უტოლობები და გერშგორინის (Gershgorin) თეორემა, გავიხსენოთ ასევე კავშირი მატრიცისა და მისი შებრუნებული მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს შორის. შედეგად მივიღებთ

$$\|K\|_h \le 1, \quad \|M\|_h \le 1, \quad \|K^{-1}\|_h \le 6, \quad \|M^{-1}\|_h \le 3\,.$$

თუ გამოვიყენებთ ამ უტოლობებს (3.14a)-ში, მივიღებთ (6.2a)-ს. (6.2b)-ს მისაღებად დაგვჭირდება ბლოკური $B'B = \left(B_{ij}\right)_{1\le i\,,j\le 5}$მატრიცი. თუ გამოვიყენებთ (3.14b)-ს, მი-ვიღებთ შემდეგ არანულოვან ბლოკებს

$$\begin{gathered} B_{11} = 4QQ', \qquad B_{22} = (cd-a)^2Q'Q + c^4d^2L'L\,, \quad B_{33} = 4(QQ' + LL')\,, \\ B_{44} = c^2d^2L'L + c^2Q'Q\,, \quad B_{55} = \ c^2d^2L'L\,, \\ B_{24} = B'_{42} = c^3dL'Q - cd(cd-a)Q'L\,, \ \ B_{25} = B'_{52} = -c^4d^2L'L\,, \\ B_{45} = B'_{54} = -c^3dQ'L. \end{gathered} \tag{6.4}$$

ცხრილი 1

მატრიცები	რიგი	დიაგონალი		
		მთავარი	პირველი	მეორე
$36LL'$	$N-1$	18, 18, … , 18	8, 8, … , 8	1, 1, … ,1
$36L'L$	$N+1$	1, 17, 18, 18, … , 18, 17, 1	4, 8, 8, … , 8, 4	1, 1, … ,1
$4h^2QQ'$	$N-1$	2, 2, … , 2		-1, -1, … , -1
$4h^2Q'Q$	$N+1$	1, 1, 2, 2, … , 2, 1, 1		-1, -1, … , -1
$12hL'Q = 12h(Q'L)'$	$N+1$	-1, -1, 0, 0, … , 0, 1, 1	ზედა 0, 4, 4, … , 4 ქვედა	ზედა 1, 1, … , 1 ქვედა

			-4, -4, … , -4, 0	-1, -1, … , -1

შევნიშნოთ, რომ (6.4)-ის ტოლობების მარჯვენა მხარეში გამრავლების შედეგად მიღებული ყველა მატრიცი კვადრატულია. შემდეგ, დაგვჭირდება რამდენიმე განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია კვადრატურული მატრიცი. მის ყოველ ელემენტს შევუსაბამოთ სტრიქონის ნომერი i და სვეტის ნომერი j. ელემენტების ერთობლიობას, რომელთათვისაც $|i-j|=k,\ k>0$, ვუწოდოთ k-ური დიაგონალი. დიაგონალს ეწოდება ქვედა, თუ $i>j$ და ზედა, თუ $i<j$. მთავარი დიაგონალის ქვეშ გვესმის ელემენტების ერთობლიობა, რომელთათვისაც $i=j$. ვიგულისხმოთ, რომ დიაგონალზე ელემენტები განთავსებულია i და j ინდექსების ზრდადობის მიხედვით. დიაგონალს დავარქვათ ნულოვანი დიაგონალი, თუ ის შეიცავს მხოლოდ ნულებს და არანულოვანი – წინააღმდეგ შემთხვევაში.

თუ ცხრილი 1-ში გამოვიყენებთ (3.9b)-სა და (3.9d)-ს, მივიღებთ დამტკიცებისთვის საჭირო მატრიცების შესაბამის რიგს და არანულოვან დიაგონალებს. მატრიცები წარმოდგენილია მამრავლებთან ერთად.

ვინაიდან

$$\|B\|_h = \gamma_*, \qquad (6.5)$$

სადაც γ_* არის B მატრიცის მაქსიმალური სინგულარული რიცხვი, პრობლემა დაიყვანება γ_*-ის შეფასებაზე. (6.4) ტოლობების, ცხრილი 1-ისა და გერშგორინის (Gershgorin) თეორემის გამოყენების შედეგად ვრწმუნდებით, რომ BB' მატრიცის თითოეულ სტრიქონს მივყავართ უტოლობამდე γ_*-თვის (იხ. ცხრილი 2).

ცხრილი 2-ისა და (6.5), (6.3) ტოლობების გამოყენებით ვღებულობთ (6.2b).

ლემა დამტკიცებულია.

ცხრილი 2

ბლოკური სტრიქონის ნომერი	**უტოლობები**
1	$\left\|\gamma_*^2-\frac{2}{h^2}\right\| \le \frac{2}{h^2}$
2	$\left\|\gamma_*^2-\frac{(cd-a)^2}{2h^2}-\frac{c^4d^2}{2}\right\| \le \frac{(cd-a)^2}{2h^2}+\frac{3c^4d^2}{2}+\frac{5cd(cd-a)}{6h}+\frac{5c^3d}{6h}$

3	$\left\|\gamma_*^2 - \frac{2}{h^2} - 2\right\| \le \frac{2}{h^2} + 2$
4	$\left\|\gamma_*^2 - \frac{c^2 d^2}{2} - \frac{c^2}{2h^2}\right\| \le \frac{5c^3 d}{3h} + \frac{5cd(cd-a)}{6h} + \frac{c^2 d^2}{2} + \frac{c^2}{2h^2}$
5	$\left\|\gamma_*^2 - \frac{c^4 d^2}{2}\right\| \le \frac{3c^4 d^2}{2} + \frac{5c^3 d}{6h}$

ჩვენ დაგვჭირდება C მატრიცის შემდეგი თვისება.

ლ ე მ ა 6 . 2 . მართებულია უტოლობა

$$\|C(v_1)Y_1 - C(v_2)Y_2\|_h \le \frac{b}{2h}\Big(\big(\|v_1\|_{K,h}^2 + \|v_2\|_{K,h}^2\big)\|Y_1 - Y_2\|_h$$

$$+ \big(\|v_1\|_{K,h} + \|v_2\|_{K,h}\big)(\|V_1\|_h + \|V_2\|_h)\|y_1 - y_2\|_h\Big), \qquad (6.6)$$

სადაც

$$y_l = (u_l, v_l, f_l, \varphi_l, \psi_l), \quad Y_l = (U_l, V_l, F_l, \Phi_l, \Psi_l), \quad u_l, U_l, f_l, F_l \in R^{N-1},$$

$$v_l, V_l, \varphi_l, \Phi_l, \psi_l, \Psi_l \in R^{N+1}, \quad l = 1, 2.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (3.14c), (6.1c) და (6.1a)-ის თანახმად,

$$\|C(v_1)Y_1 - C(v_2)Y_2\|_h = b\left\|\|v_1\|_{K,h}^2 QV_1 - \|v_2\|_{K,h}^2 QV_2\right\|_h$$

$$= \frac{b}{2}\left\|\sum_{i=0}^{1}\Big(\|v_{i+1}\|_{K,h}^2 (V_1 - V_2) + \big(\|v_1\|_{K,h}^2 - \|v_2\|_{K,h}^2\big)QV_{i+1}\Big)\right\|_h$$

$$\le \frac{b}{2h}\sum_{i=0}^{1}\Big(\|v_{i+1}\|_{K,h}^2\|V_1 - V_2\|_h + \big(\|v_1\|_{K,h} + \|v_2\|_{K,h}\big)\|v_1 - v_2\|_h\|V_{i+1}\|_h\Big). \quad (6.7)$$

თუ (6.7)-ში გამოვიყენებთ უტოლობებს

$$\|V_1 - V_2\|_h \le \|Y_1 - Y_2\|_h, \qquad \|v_1 - v_2\|_h \le \|y_1 - y_2\|_h,$$

მივიღებთ (6.6)-ს.

ლემა დამტკიცებულია.

7. სასრულ ელემენტთა მეთოდის სიზუსტე

7.1. ცდომილების განსაზღვრება და განტოლება ცდომილებისთვის. ვთქვათ, $\lambda(x,t)$ და $\mu(x,t)$ არის $[0,1] \times [0,\mathrm{T}]$-ზე განსაზღვრული ფუნქციები და პირველი ამ ფუნქციებიდან აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$\lambda(0,t) = \lambda(1,t) = 0.$$

განვიხილოთ ვექტორები

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \big(\lambda(x_1,t), \lambda(x_2,t), \dots, \lambda(x_{N-1},t)\big),$$
$$\boldsymbol{\mu}(t) = \big(\mu(x_0,t), \mu(x_1,t), \dots, \mu(x_N,t)\big). \tag{7.1}$$

(2.1) ფუნქციებისა და (7.1) განსაზღვრებების საშუალებით შემოვიღოთ ვექტორი

$$\boldsymbol{y}(t) = \big(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\big). \tag{7.2}$$

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $\boldsymbol{y}(t)$ ვექტორი შეიცავს (2.3), (2.4) ამოცანის ზუსტი ამონახსნის მნიშვნელობებს $[0,1]$ ინტერვალის x_i კვანძებში.

სასრულ ელემენტთა მეთოდის ცდომილებას განვსაზღვრავთ როგორც (7.2) და (3.13a) ვექტორების სხვაობას

$$\boldsymbol{z}_h(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_h(t). \tag{7.3}$$

$\boldsymbol{z}_h$-თვის განტოლებისა და საწყისი მნიშვნელობის მისაღებად, (3.11) განტოლებასა და (3.12) პირობაში ჩავსვათ $\boldsymbol{y}_h(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{z}_h(t)$ ტოლობა და მხედველობაში მივიღოთ (2.4), (3.13b) და (3.10). შედეგად მიიღება განტოლება

$$A\frac{d\boldsymbol{z}_h(t)}{dt} = B\boldsymbol{z}_h(t) + \Big(C\big(\boldsymbol{v}(t)\big)\boldsymbol{y}(t) - C\big(\boldsymbol{v}_h(t)\big)\boldsymbol{y}_h(t)\Big) + \boldsymbol{\theta}_h(t), \tag{7.4}$$
$$0 < t \le T,$$

საწყისი პირობით

$$\boldsymbol{z}_h(0) = \boldsymbol{0}, \tag{7.5}$$

სადაც $\boldsymbol{\theta}_h(t)$ სასრულ ელემენტთა (3.11) სისტემის აპროქსიმაციის ცდომილებაა, ხოლო $\boldsymbol{0}$ – აქ და ქვემოთ შესაბამისი განზომილების ნული-ვექტორია. აპროქსიმაციის ცდომილებისთვის გვაქვს

$$\boldsymbol{\theta}_h(t) = A\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} - \Big(B + C\big(\boldsymbol{v}(t)\big)\Big)\boldsymbol{y}(t), \tag{7.6}$$
$$0 < t \le T,$$

და

$$\boldsymbol{\theta}_h(0) = \boldsymbol{0}. \tag{7.7}$$

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს $\boldsymbol{z}_h(t)$-ის შეფასება. ამისთვის უნდა გამოვიყვანოთ რამდენიმე უტოლობა.

7.2. აპრიორული შეფასებები. შესაფასებელია (7.2)-ში შემავალი $\boldsymbol{v}(t)$ ვექტორის ნორმა. ამისთვის შემოვიღოთ s_0 სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია საწყის ფუნქციებზე (2.4) პირობიდან და $v(x,t)$ ფუნქციაზე (2.1)-დან. დავუშვათ,

$$v(x,t) \in C^{p,0}([0,1]\times[0,T]), \tag{7.8}$$

სადაც $p=1$ ან $p=2$. ვთქვათ,

$$s_0=\frac{a}{b}+\left(\frac{2}{b}\left(\|w^1(x)\|^2+cd\|w_x^2(x)-\psi^2(x)\|^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2b}(a-b\|w_x^2(x)\|^2)^2+\frac{1}{c}\|\psi^1(x)\|^2+\|\psi_x^2(x)\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}+h^p\omega_p, \quad (7.9)$$

სადაც

$$\omega_p=\begin{cases}\frac{5}{6}m_0m_1, & p=1,\\ \frac{1}{3}\left(m_0(m_1+m_2)+\frac{1}{2}m_1^2\right), & p=2,\end{cases} \quad (7.10)$$

და

$$m_l=\max_{0\le x\le 1}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^l v(x,t)}{\partial x^l}\right|, \ \ l=0,1,2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1 . (7.9)-ს მარჯვენა მხარის ბოლო წევრი რაგინდ მცირეა, როცა $h\to 0$ და, მაშასადამე,

$$s_0\to\frac{a}{b}+\left(\frac{2}{b}\left(\|w^1(x)\|^2+cd\|w_x^2(x)-\psi^2(x)\|^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2b}(a-b\|w_x^2(x)\|^2)^2+\frac{1}{c}\|\psi^1(x)\|^2+\|\psi_x^2(x)\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

შევაფასოთ $\boldsymbol{v}(t)$ ვექტორის ნორმა.

ლ ე მ ა 7 . 1 . მართებულია უტოლობა

$$\|\boldsymbol{v}(t)\|_{K,h}^2\le s_0, \quad (7.11)$$
$$0\le t\le T.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (2.3)-ის განტოლებები სკალარულად გავამრავლოთ

$$u(x,t), \quad cdv(x,t), \quad \frac{1}{c}f(x,t), \quad \varphi(x,t), \quad cd\psi(x,t),$$

ფუნქციებზე შესაბამისად და შევკრიბოთ მიღებული გამოსახულებები. (2.2)-(2.4)-დან ზოგიერთი ტოლობის გამოყენებით ვპოულობთ

$$\begin{gathered}(v_x,u)=-(v,u_x), \quad (v_x,u)=-(v,u_x)=-(v,v_t),\\ (\varphi,u)=(\psi_x,u)=-(\psi,u_x)=-(\psi,v_t),\\ (\varphi_x,f)=-(\psi,f_x), \quad (v,f)=(v,\psi_t).\end{gathered} \quad (7.12)$$

(7.12)-ის გამო გვექნება

$$\frac{de(t)}{dt} = 0,$$

სადაც

$$e(t) = \frac{a}{b} + \Bigg(\Big(\|u(x,t)\|^2 + cd\|v(x,t) - \psi(x,t)\|^2 + \frac{1}{2b}(a - b\|v(x,t)\|^2)^2 + \frac{1}{c}\|f(x,t)\|^2 + \|\varphi(x,t)\|^2\Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.13)$$

მაშასადამე,

$$e(t) = e(0). \qquad (7.14)$$

(7.13)-დან, (7.14)-დან და (2.4)-ში საწყისი პირობების მხედველობაში მიღების შედეგად, ვპოულობთ

$$\int_0^1 v^2(x,t)dx \leq \frac{a}{b} + \Bigg(\frac{2}{b}\Big(\|w^1(x)\|^2 + cd\|w_x^2(x) - \psi^2(x)\|^2 + \frac{1}{2b}(a - b\|w_x^2(x)\|^2)^2 + \frac{1}{c}\|\psi^1(x)\|^2 + \|\psi_x^2(x)\|^2\Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.15)$$

(7.1)-ისა და (3.9a)-ის თანახმად,

$$\|v(t)\|_{K,h}^2 = \frac{1}{6}h\Bigg(\big(2v(x_0,t) + v(x_1,t)\big)v(x_0,t) + \sum_{i=1}^{N-1}(v(x_{i-1},t) + 4v(x_i,t) + v(x_{i+1},t))v(x_i,t) + \big(v(x_{N-1},t) + 2v(x_N,t)\big)v(x_N,t)\Bigg). \qquad (7.16)$$

(7.16)-დან გამომდინარეობს

$$\|v(t)\|_{K,h}^2 = h\left(\frac{1}{2}v^2(x_0,t) + \sum_{i=1}^{N-1} v^2(x_i,t) + \frac{1}{2}v^2(x_N,t)\right) + \frac{1}{6}h\Bigg(hv_x(\xi_0,t)v(x_0,t) + \frac{1}{p}h^p\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{\partial^p v(\xi_i,t)}{\partial x^p} + \frac{\partial^p v(\eta_i,t)}{\partial x^p}\right)v(x_i,t) + hv_x(\eta_N,t)v(x_N,t)\Bigg), \qquad (7.17)$$

სადაც $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,N-1$, $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\dots,N.$ რიცხვითი ინტეგრების ტრაპეციების ფორმულის [14] საფუძველზე გვაქვს

$$\int_0^1 v^2(x,t)dx = h\left(\frac{1}{2}v^2(x_0,t) + \sum_{i=1}^{N-1} v^2(x_i,t) + \frac{1}{2}v^2(x_N,t)\right) + r_p, \tag{7.18}$$

სადაც r_p ნაშთითი წევრია. $p = 1$ და $p = 2$ სრულდება უტოლობები

$$|r_1| \le \frac{1}{4}h \max_{0\le x\le 1}\left|\left(v^2(x,t)\right)_x\right| \quad \text{და} \quad |r_2| \le \frac{1}{12}h^2 \max_{0\le x\le 1}\left|\left(v^2(x,t)\right)_{xx}\right| [21].$$

თუ გამოვიყენებთ (7.18) ტოლობას, (7.15) და (7.17) გამოსახულებებთან ერთად, და შევასრულებთ გარკვეულ გამოთვლებს, მივიღებთ (7.11) შეფასებას.

ლემა დამტკიცებულია.

შემდეგ, ჩვენ გვჭირდება სასრულ ელემენტთა (3.7) სისტემაში შემავალი $\boldsymbol{v}_h(t)$ ვექტორის ნორმის შეფასება. ამისათვის შემოვიღოთ s_1 სიდიდე, რომელიც განისაზღვრება (3.8) საწყის პირობებში მონაწილე ვექტორების საშუალებით

$$s_1 = \frac{a}{b} + \left(\left(\frac{2}{b}\|\boldsymbol{w}^1\|_{M,h}^2 + cd\|\boldsymbol{w}_x^2 - \boldsymbol{\psi}^2\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b}\left(a - b\|\boldsymbol{w}_x^2\|_{K,h}^2\right)^2 + \frac{1}{c}\|\boldsymbol{\psi}^1\|_{M,h}^2 + \|\boldsymbol{\psi}_x^2\|_{K,h}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{2}} cdT\|L\boldsymbol{\psi}_x^2 - Q\boldsymbol{\psi}^2\|_h. \tag{7.19}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2 . (3.5) და (3.6) სახის ფუნქციებისა და ვექტორებისთვის ადგილი აქვს ტოლობებს $\|\lambda_h\| = \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{M,h}$, $\|\mu_h\| = \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{K,h}$. გამოვიყენოთ ეს გამოსახულებები (1.3), (3.4) და (3.9b), (3.9d) ფორმულებთან ერთად. გარდა ამისა, მხედველობაში მივიღოთ $\omega_{h,j}$ ფუნქციების, $j = 0, 1, \dots, N$, მააპროქსიმებელი თვისებები [45]. შედეგად მივდივართ დასკვნამდე, რომ (7.19)-ის მარჯვენა მხარის ბოლო შესაკრები რაგინდ მცირეა, როცა $h \to 0$ და

$$s_1 \to \frac{a}{b} + \left(\frac{2}{b}\left(\|w^1(x)\|^2 + cd\|w_x^2(x) - \psi^2(x)\|^2 + \frac{1}{2b}(a - b\|w_x^2(x)\|^2)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{c}\|\psi^1(x)\|^2 + \|\psi_x^2(x)\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.20}$$

ლ ე მ ა 7 . 2 . არსებობს (3.7), (3.8) ამოცანის ამონახსნი და მართებულია უტოლობა

$$\|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2 < s_1, \tag{7.21}$$

$$0 \le t \le T.$$

დამტკიცება. (3.7) განტოლებები სკალარულად გავამრავლოთ, შესაბამისად, $\boldsymbol{u}_h(t)$, $cd\boldsymbol{v}_h(t)$, $\frac{1}{c}\boldsymbol{f}_h(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_h(t)$, $cd\boldsymbol{\psi}_h(t)$-ზე და შევკრიბოთ მიღებული გამოსახულებები. გარკვეული გარდაქმნების შედეგად ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\boldsymbol{u}_h(t)\|_{M,h}^2 + cd\|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2 + \frac{1}{c}\|\boldsymbol{f}_h(t)\|_{M,h}^2 + \|\boldsymbol{\varphi}_h(t)\|_{K,h}^2 + cd\|\boldsymbol{\psi}_h(t)\|_{K,h}^2\right)$$
$$= \left(-a + b\|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2\right)\left(Q\boldsymbol{v}_h(t), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h$$
$$+cd\left(\left(L\boldsymbol{v}_h(t), \boldsymbol{f}_h(t)\right)_h - \left(L\boldsymbol{\varphi}_h(t), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h\right). \qquad (7.22)$$

(7.22)-ში გარდავქმნათ სკალარული ნამრავლები. (3.7b)-ისა და (3.7e)-ის ძალით,

$$\left(Q\boldsymbol{v}_h(t), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h = \left(\boldsymbol{v}_h(t), Q'\boldsymbol{u}_h(t)\right)_h = -\left(\boldsymbol{v}_h(t), K\frac{d\boldsymbol{v}_h(t)}{dt}\right)_h = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2,$$
$$\left(L\boldsymbol{v}_h(t), \boldsymbol{f}_h(t)\right)_h = \left(\boldsymbol{v}_h(t), L'\boldsymbol{f}_h(t)\right)_h = \left(\boldsymbol{v}_h(t), K\frac{d\boldsymbol{\psi}_h(t)}{dt}\right)_h. \qquad (7.23)$$

$\left(L\boldsymbol{\varphi}_h(t), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h$ ნამრავლის გარდაქმნისათვის დაგვჭირდება ფორმულა

$$LK^{-1}Q' = -QK^{-1}L'. \qquad (7.24)$$

დავამტკიცოთ ეს ფორმულა.

(3.9a), (3.9b)-დან გამომდინარეობს, რომ L მატრიცი მიიღება K მატრიციდან პირველი და ბოლო სტრიქონის ამოშლით. ამის გამო და $KK^{-1} = I$ ტოლობის ძალით, რომელშიც I იგივური მატრიცაა, ვასკვნით, რომ LK^{-1} არის $(N-1)\times(N+1)$ განზომილების შემდეგი სახის მატრიცი

$$LK^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7.25)$$

ახლა, თუ LK^{-1} მატრიცს მარჯვნიდან გავამრავლებთ Q'-ზე, ხოლო $K^{-1}L' = (LK^{-1})'$ მატრიცს მარცხნიდან გავამრავლებთ Q-ზე, მაშინ (3.9d)-ისა და (7.24)-ის საშუალებით მივიღებთ (7.24)-ს.

თუ (7.24)-ს გამოვიყენებთ (3.7d)-დან და (3.7e)-დან გამომდინარე ტოლობებში

$$L\frac{d\boldsymbol{\varphi}_h(t)}{dt} = -LK^{-1}Q'\boldsymbol{f}_h(t), \qquad Q\frac{d\boldsymbol{\psi}_h(t)}{dt} = QK^{-1}L'\boldsymbol{f}_h(t)$$

და შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\boldsymbol{\zeta}_h(t) = L\boldsymbol{\varphi}_h(t) - Q\boldsymbol{\psi}_h(t), \qquad (7.26)$$

მივიღებთ

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}_h(t)}{dt} = 0.$$

ამრიგად,

$$\boldsymbol{\zeta}_h(t) = \boldsymbol{\zeta}_h(0), \qquad (7.27)$$
$$0 < t \leq T.$$

(7.26), (7.27) და (3.7b) ფორმულების საფუძველზე

$$\left(L\boldsymbol{\varphi}_h(t) - \boldsymbol{\zeta}_h(0), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h = \left(Q\boldsymbol{\psi}_h(t), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h$$
$$= \left(\boldsymbol{\psi}_h(t), Q'\boldsymbol{u}_h(t)\right)_h = -\left(\boldsymbol{\psi}_h(t), K\frac{d\boldsymbol{v}_h(t)}{dt}\right)_h. \qquad (7.28)$$

გავამრავლოთ (7.22) გამოსახულება $(3c^2d^2)^{-1}$-ზე და მხედველობაში მივიღოთ (7.23), (7.28), აგრეთვე, K მატრიცის სიმეტრიულობა. გვექნება

$$\frac{de_h^2(t)}{dt} = -\frac{2}{3cd}\left(\boldsymbol{\zeta}_h(0), \boldsymbol{u}_h(t)\right)_h,$$

სადაც

$$e_h(t) = 3^{\frac{1}{2}}\frac{1}{cd}\Big(\|\boldsymbol{u}_h(t)\|_{M,h}^2 + cd\|\boldsymbol{v}_h(t) - \boldsymbol{\psi}_h(t)\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b}\left(a - b\|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2\right)^2$$
$$+\frac{1}{c}\|\boldsymbol{f}_h(t)\|_{M,h}^2 + \|\boldsymbol{\varphi}_h(t)\|_{K,h}^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.29)$$

ეს ტოლობა და (6.1b)-დან გამომდინარე $\|\boldsymbol{u}_h(t)\|_h \leq 3^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}_h(t)\|_{M,h}$ უტოლობა გვაძლევს

$$e_h^2(t) \leq e_h^2(0) + 2\|\boldsymbol{\zeta}_h(0)\|_h \int_0^t e_h(\tau)\, d\tau\, . \qquad (7.30)$$

გამოვიყენოთ გრონუოლის (Gronwall) უტოლობის ბიჰარისა (Bihari) და ლანგენჰოფის (Langenhopf) განზოგადება [8]. ვთქვათ, $p(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ უწყვეტი ფუნქციაა და $\omega : (0, \infty) \to (0, \infty)$ არაკლებადი უწყვეტი ფუნქციაა. დავუშვათ, სრულდება უტოლობა

$$p(t) \leq c_0 + \int_0^t \omega\big(p(\tau)\big)d\tau, \quad 0 \leq t < \infty,$$

სადაც c_0 დადებითი მუდმივია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი Ω_0 რიცხვისთვის, რომელიც ნაკლებია $\Omega(\infty)$-ზე, სრულდება $p(t) \leq \Omega^{-1}(\Omega_0) < \infty,\ 0 \leq t \leq \Omega_0$. აქ

$$\Omega(t) = \int_{c_0}^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)}\, , \quad t \geq c_0.$$

გამოვიყენოთ ეს შედეგი (7.30)-ში. თუ დავუშვებთ, რომ $p(t) = e_h^2(t)$, $c_0 = e_h^2(0)$,

$$\omega(\tau) = 2\|\boldsymbol{\zeta}_h(0)\|_h\sqrt{\tau},\ \ \Omega_0 = T,$$

მივიღებთ

$$e_h(t) \le e_h(0) + T\|\boldsymbol{\zeta}_h(0)\|_h, \quad 0 < t \le T. \tag{7.31}$$

(7.31)-ისა და (7.29)-ის ძალით,

$$\|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2 \le \frac{a}{b} + \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{2}} cde_h(t) \le \frac{a}{b} + \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{2}} cd(e_h(0) + T\|\boldsymbol{\zeta}_h(0)\|_h). \tag{7.32}$$

(7.29), (7.26) და (3.8), (7.19)-ის (7.32)-ში ჩასმის შედეგად მიიღება შეფასება (7.21).

ლემის პირველი დებულება გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ $\boldsymbol{u}_h(t)$, $\boldsymbol{v}_h(t)$, $\boldsymbol{f}_h(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_h(t)$, $\boldsymbol{\psi}_h(t)$ ვექტორების ნორმები თანაბრად შემოსაზღვრულია h-ის მიმართ. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია გამოვიყენოთ (7.31), (7.29), (7.26) და (7.20).

ლემა დამტკიცებულია.

7.3. სასრულ ელემენტთა მეთოდის ცდომილების შეფასება. აქ განვიხილავთ (7.2) ცდომილებას. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\alpha_1 = 3\left(\gamma + \left(s_0 + 6^{\frac{1}{2}}\left(s_0^{\frac{1}{2}} + s_1^{\frac{1}{2}}\right)^2 + s_1\right)\frac{b}{2h}\right). \tag{7.33}$$

თ ე ო რ ე მ ა 7 . 1 . დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს (7.8) პირობას. მაშინ დროის ინტერვალის t_n კვანძში სასრულ ელემენტთა მეთოდის ცდომილებისათვის მართებულია შეფასება

$$\|\boldsymbol{z}_h(t_n)\|_h \le C_1 \max_{0\le t\le t_n} \|\boldsymbol{\theta}_h(t)\|_h, \tag{7.34}$$

სადაც

$$C_1 = 3t_n \exp(\mathrm{t}_n\alpha_1), \qquad n = 1, 2, \dots, P. \tag{7.35}$$

კერძოდ, თუ (2.1) ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\begin{gathered} u(x,t), v(x,t), f(x,t), \varphi(x,t) \in C^{2,1}([0,1]\times[0,T]), \\ \psi(t) \epsilon C^{1,1}([0,1]\times[0,T]), \end{gathered} \tag{7.36}$$

მაშინ

$$\|\boldsymbol{z}_h(t_n)\|_h \le c_1 h, \tag{7.37}$$

სადაც

$$c_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5)C_1. \tag{7.38}$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნები

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}m_{u,20} + \frac{1}{3}m_{u,11},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(cd - a + bs_0)m_{v,20} + \frac{2}{3}m_{v,11} + \frac{1}{3}\left(c^2 d + \frac{5}{2}bm_{v,00}m_{v,10}\right)m_{v,10},$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}m_{f,20} + \frac{1}{3}m_{f,11} + \frac{1}{3}m_{f,10}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{2}cm_{\varphi,20} + \frac{1}{3}m_{\varphi,11} + \frac{1}{3}cdm_{\varphi,10},$$

$$\sigma_5 = \frac{2}{3}m_{\psi,11} + \frac{1}{3}c^2dm_{\psi,10},$$

$$m_{\lambda,ij} = \max_x \max_t \left|\frac{\partial^{i+j}\lambda(x,t)}{\partial x^i \partial t^j}\right|, \qquad x\epsilon[0,1], \quad t\epsilon[0,T].$$

დამტკიცება. (7.4) განტოლებისა და (7.5) საწყისი პირობების გამოყენების შედეგად ვღებულობთ

$$A\boldsymbol{z}_h(t) = \int_0^t \Big(B\boldsymbol{z}_h(\tau) + \Big(C\big(\boldsymbol{v}(\tau)\big)\boldsymbol{y}(\tau) - C\big(\boldsymbol{v}_h(\tau)\big)\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{h}}(\tau)\Big) + \boldsymbol{\theta}_h(\tau)\Big)d\tau. \tag{7.39}$$

(6.6), (7.11), (7.21), (6.1a) და (7.3) ფორმულების თანახმად,

$$\begin{aligned}
&\left\|C\big(\boldsymbol{v}(t)\big)\boldsymbol{y}(t) - C\big(\boldsymbol{v}_h(t)\big)\boldsymbol{y}_h(t)\right\|_h \\
&\quad \le \frac{b}{2h}\Big(\big(\|\boldsymbol{v}(t)\|_{K,h}^2 + \|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}^2\big) \\
&\qquad + \big(\|\boldsymbol{v}(t)\|_{K,h} + \|\boldsymbol{v}_h(t)\|_{K,h}\big)(\|\boldsymbol{v}(t)\|_h + \|\boldsymbol{v}_h(t)\|_h)\|\boldsymbol{z}_h(t)\|_h\Big) \\
&\qquad \le \frac{b}{2h}\left(s_0 + 6^{\frac{1}{2}}\left(s_0^{\frac{1}{2}} + s_1^{\frac{1}{2}}\right)^2 + s_1\right)\|\boldsymbol{z}_h(t)\|_h.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

ამ თანაფარდობის, (6.2)-ის, (7.33)-ისა და (7. 39)-ის გამო,

$$\|\boldsymbol{z}_h(t)\|_h \le \int_0^t (\alpha_1\|\boldsymbol{z}_h(\tau)\|_h + 3\|\boldsymbol{\theta}_h(\tau)\|_h)d\tau.$$

გრონუოლის (Gronwall) უტოლობისა და (7.35)-ის გამოყენების შედეგად ვასკვნით, რომ სრულდება შეფასება (7.34).

ახლა შევუდგეთ (7.37) უტოლობის დამტკიცებას. შემოვიღოთ რამდენიმე აღნიშვნა. დავუშვათ, $\lambda(x)$ და $\mu(x)$ არის $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული საკმარისად გლუვი ფუნქციები, $\lambda(0) = \lambda(1) = 0$ და, ვთქვათ,

$$m_{\lambda,l} = \max_x \left|\frac{d^l\lambda(x)}{dx^l}\right|, \quad m_{\mu,l} = \max_x \left|\frac{d^l\mu(x)}{dx^l}\right|, \qquad x \in [0,1], \qquad l = 0, 1,2.$$

$\lambda(x)$ და $\mu(x)$ ფუნქციების და მათი წარმოებულების მნიშვნელობები $x_i = ih$ კვანძებში აღვნიშნოთ $\lambda_i = \lambda(x_i)$, $\mu_i = \mu(x_i)$ და $\lambda_i' = \lambda'(x_i)$, $\mu_i' = \mu'(x_i)$. შემოვიღოთ ვექტორები $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1})$ და $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N)$.

(3.9) განსაზღვრებებისა და ტეილორის მწკრივად გაშლის ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ

$$
\begin{gathered}
K\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{1}{2}\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}, \frac{1}{2}\mu_N\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_K, \quad L\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_L, \\
M\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_M, \quad Q\boldsymbol{\mu} = (\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_{N-1}') + \boldsymbol{\varepsilon}_Q, \\
Q'\boldsymbol{\lambda} = -\left(\frac{1}{2}\lambda_0', \lambda_1', \dots, \lambda_{N-1}', \frac{1}{2}\lambda_N'\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_Q, \\
L'\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{1}{2}\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \frac{1}{2}\lambda_N\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{L'}, \\
\|\boldsymbol{\mu}\|_{K,h}^2 Q\boldsymbol{\mu} = \left(\int_0^1 \mu^2(x)\,dx\right)(\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_{N-1}') + \boldsymbol{\varepsilon}_\int .
\end{gathered} \tag{7.41}
$$

ამ ტოლობების მეორე შესაკრებები წარმოადგენს ვექტორებს, რომელთათვისაც მართებულია შეფასებები

$$
\begin{gathered}
\|\boldsymbol{\varepsilon}_K\|_h, \|\boldsymbol{\varepsilon}_L\|_h \le \frac{1}{3}hm_{\mu,1}, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}_M\|_h, \|\boldsymbol{\varepsilon}_{L'}\|_h \le \frac{1}{3}hm_{\lambda,1}, \\
\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_Q\right\|_h \le \frac{1}{2}hm_{\mu,2}, \ \left\|\boldsymbol{\varepsilon}_{Q'}\right\|_h \le \frac{1}{2}hm_{\lambda,2}, \\
\left\|\boldsymbol{\varepsilon}_\int\right\|_h \le \frac{1}{2}h\left(\|\boldsymbol{\mu}\|_{K,h}^2 m_{\mu,2} + \frac{5}{3}m_{\mu,0}m_{\mu,1}^2\right).
\end{gathered} \tag{7.42}
$$

შევნიშნოთ, რომ (7.42)-ის ბოლო უტოლობის მისაღებად ტეილორის ფორმულის გარდა საჭიროა (7.17) და (7.10) გამოსახულებების გამოყენება.

ახლა, იმისათვის, რომ მივიღოთ (7.37) უტოლობა, უნდა შევაფასოთ $\boldsymbol{\theta}_h(t)$ ვექტორის ნორმა (7.34)-ში. ამისათვის, (7.6)-ში უნდა გამოვიყენოთ (7.2) და (3.14) განსაზღვრებები. შედეგად მიიღება ხუთი მატრიცული ტოლობა, თითოეული მათგანისათვის გამოსაყენებელია შესაბამისი ფორმულები (7.41), (7.42)-დან, (2.3) განტოლებები და (7.11) უტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

8. სხვაობიანი სქემის სიზუსტე

8.1. განტოლება ცდომილებისათვის. განვსაზღვროთ (4.4), (4.5) სხვაობიანი სქემის ცდომილება n-ურ შრეზე, ე. ი. $t = t_n$-ურ კვანძში, $n = 0,1,\dots,P$, როგორც სხვაობა $\boldsymbol{y}_h(t_n)$ ვექტორსა, რომელიც წარმოადგენს (3.11) სასრულ ელემენტთა სისტემის ამონახსნს $t = t_n$ კვანძში და $\boldsymbol{y}_h^n$ ვექტორს, რომელიც წარმოადგენს სხვაობიანი სქემის ამონახსნს ამავე კვანძში, შორის. მაშასადამე,

$$
\boldsymbol{z}_h^n = \boldsymbol{y}_h(t_n) - \boldsymbol{y}_h^n. \tag{8.1}
$$

$\boldsymbol{z}_h^n$-თვის განტოლებისა და საწყისი მნიშვნელობის მიღების მიზნით (4.4)-სა და (4.5)-ში $\boldsymbol{y}_h^n$ შევცვალოთ $\boldsymbol{y}_h(t_n) - \boldsymbol{z}_h^n$-ით. მივიღებთ

$$A\frac{\boldsymbol{z}_h^n - \boldsymbol{z}_h^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}B(\boldsymbol{z}_h^n + \boldsymbol{z}_h^{n-1}) + \frac{1}{4}\Big(\Big(C\big(\boldsymbol{v}_h(t_n)\big) + C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\big)\Big)\big(\boldsymbol{y}_h(t_n) + \boldsymbol{y}_h(t_{n-1})\big)$$

$$-\Big(C(\boldsymbol{v}_h^n) + C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\Big)(\boldsymbol{y}_h^n + \boldsymbol{y}_h^{n-1})\Big) + \boldsymbol{\theta}_h^n, \qquad (8.2)$$

$$n = 1, 2, \ldots, P,$$

და

$$\boldsymbol{z}_h^0 = 0. \qquad (8.3)$$

აქ $\boldsymbol{\theta}_h^n$ წარმოადგენს (4.4) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებას

$$\boldsymbol{\theta}_h^n = A\frac{\boldsymbol{y}_h(t_n) - \boldsymbol{y}_h(t_{n-1})}{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}\left(B + \frac{1}{2}\Big(C\big(\boldsymbol{v}_h(t_n)\big) + C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\big)\Big)\right)\big(\boldsymbol{y}_h(t_n) + \boldsymbol{y}_h(t_{n-1})\big). \qquad (8.4)$$

8.2. დამხმარე შეფასება. ჩვენი მიზანია (8.2) განტოლების საშუალებით სხვაობიანი სქემის $\boldsymbol{z}_h^n$ ცდომილების შეფასებაა. ამისათვის დაგვჭირდება (4.1) სხვაობიან სქემაში შემავალი $\boldsymbol{v}_h^n$ ვექტორის ნორმის შეფასება.

ლ ე მ ა 8 . 1 . არსებობს (4.1), (4.2) ამოცანის ამონახსნი და მართებულია აპრიორული შეფასება

$$\|\boldsymbol{v}_h^n\|_{K,h}^2 < s_1, \qquad (8.5)$$

$$n = 1, 2, \ldots, P.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . $\boldsymbol{y}_l = (\boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{f}_l, \boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\psi}_l)$, $\boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{f}_l \epsilon R^{N-1}$, $\boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\psi}_l \epsilon R^{N+1}$ ვექტორისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\zeta(\boldsymbol{y}_l) = L\boldsymbol{\varphi}_l - Q\boldsymbol{\psi}_l, \qquad (8.6a)$$

$$e(\boldsymbol{y}_l) = 3^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{cd}\Big(\|\boldsymbol{u}_l\|_{M,h}^2 + cd\|\boldsymbol{v}_l - \boldsymbol{\psi}_l\|_{K,h}^2$$

$$+\frac{1}{2b}\big(ab\|\boldsymbol{v}_l\|_{K,h}^2\big)^2 + \frac{1}{c}\|\boldsymbol{f}_l\|_{K,h}^2 + \|\boldsymbol{\varphi}_l\|_{K,h}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad (8.6b)$$

$$l = 0, 1, \ldots, P.$$

(4.1) განტოლებები სკალარულად გავამრავლოთ, შესაბამისად,

$$\boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \quad \frac{1}{2}cd(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}), \quad \frac{1}{c}(\boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1}),$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_h^n + \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}), \quad \frac{1}{2}cd(\boldsymbol{\psi}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^{n-1}),$$

და შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები. გვექნება

$$\sum_{l=0}^{1}(-1)^l\left(\left\|\boldsymbol{u}_h^{n-l}\right\|_{M,h}^2 + cd\left\|\boldsymbol{v}_h^{n-l}\right\|_{K,h}^2 + \frac{1}{c}\left\|\boldsymbol{f}_h^{n-l}\right\|_{M,h}^2 + \left\|\boldsymbol{\varphi}_h^{n-l}\right\|_{K,h}^2 + cd\left\|\boldsymbol{\psi}_h^{n-l}\right\|_{K,h}^2\right)$$

$$= \tau\left(\left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\left(\|\boldsymbol{v}_h^{n-1}\|_{K,h}^2 + \|\boldsymbol{v}_h^n\|_{K,h}^2\right)\right)(Q(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h\right.$$

$$\left.+\frac{cd}{2}((L(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}), \boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1})_h - (L(\boldsymbol{\varphi}_h^n + \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h)\right). \quad (8.7)$$

განვიხილოთ სკალარული ნამრავლები (8.7)-ში. (4.1b)-სა და (4.1e)-ს ძალით

$$(Q(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h$$

$$= -\frac{2}{\tau}\left(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}, K(\boldsymbol{v}_h^n - \boldsymbol{v}_h^{n-1})\right)_h = -\frac{2}{\tau}\left(\|\boldsymbol{v}_h^n\|_{K,h}^2 - \|\boldsymbol{v}_h^{n-1}\|_{K,h}^2\right), \quad (8.8)$$

$$(L(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}), \boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1})_h = \frac{2}{\tau}\left(\boldsymbol{v}_h^n + \boldsymbol{v}_h^{n-1}, K(\boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^{n-1})\right)_h.$$

შემდეგ, გარდავქმნათ $(L(\boldsymbol{\varphi}_h^n + \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h$ გამოსახულება. (4.1d) და (4.1c) გან-ტოლებებიდან გამომდინარეობს ტოლობები

$$L(\boldsymbol{\varphi}_h^n - \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}) = -\frac{\tau}{2}LK^{-1}Q'(\boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1}),$$

$$Q(\boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^{n-1}) = \frac{\tau}{2}QK^{-1}L'(\boldsymbol{f}_h^n + \boldsymbol{f}_h^{n-1}),$$

რომელთა (8.6a)-ს (7.24)-თან ერთად გამოყენების შედეგად მიიღება

$$\zeta(\boldsymbol{y}_h^n) = \zeta(\boldsymbol{y}_h^0), \quad (8.9)$$

$n = 1, 2, \dots, P$. (8.6a), (8.9) და (4.1b)-დან მიიღება

$$(L(\boldsymbol{\varphi}_h^n + \boldsymbol{\varphi}_h^{n-1}), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h = (Q(\boldsymbol{\psi}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^{n-1}) + \zeta(\boldsymbol{y}_h^n) + \zeta(\boldsymbol{y}_h^{n-1}), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h$$

$$= \left(\boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^{n-1}, Q'(\boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})\right)_h + 2(\zeta(\boldsymbol{y}_h^0), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h$$

$$= -\frac{2}{\tau}\left(\boldsymbol{\psi}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^{n-1}, K(\boldsymbol{v}_h^n - \boldsymbol{v}_h^{n-1})\right)_h + 2(\zeta(\boldsymbol{y}_h^0), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h. \quad (8.10)$$

თუ (8.8)-ს და (8.10)-ს ჩავსვამთ (8.7)-ში და გამოვიყენებთ (8.6b)-ს, გვექნება

$$e^2(\boldsymbol{y}_h^n) = e^2(\boldsymbol{y}_h^{n-1}) = -\frac{\tau}{3cd}(\zeta(\boldsymbol{y}_h^0), \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}_h^{n-1})_h. \quad (8.11)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (8.11)-ს, (8.6b)-სა და (6.1b)-ს, მივალთ დასკვნამდე, რომ

$$\sum_{l=0}^{1}\left((-1)^l e^2(\boldsymbol{y}_h^{n-1}) - \tau\left\|\zeta(\boldsymbol{y}_h^0)\right\|_h e(\boldsymbol{y}_h^{n-1})\right) \le 0.$$

$e(\boldsymbol{y}_h^n)$ მიმართ ამ უტოლობის ამოხსნის შედეგად გვექნება

$$e(\boldsymbol{y}_h^n) \leq e(\boldsymbol{y}_h^{n-1}) + \tau\left\|\zeta(\boldsymbol{y}_h^0)\right\|_h,$$

რის გამოც

$$e(\boldsymbol{y}_h^n) \leq e(\boldsymbol{y}_h^0) + T\left\|\zeta(\boldsymbol{y}_h^0)\right\|_h, \tag{8.12}$$

$n = 1, 2, \dots, P$. (8.12) და (8.6b)-ს საფუძველზე

$$\|\boldsymbol{v}_h^n\|_{K,h}^2 \leq \frac{a}{b} + \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{2}} cde(\boldsymbol{y}_h^n) \leq \frac{a}{b}\left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{2}} cd\left(e(\boldsymbol{y}_h^0) + T\left\|\zeta(\boldsymbol{y}_h^0)\right\|_h\right). \tag{8.13}$$

თუ გამოვიყენებთ (8.13)-ს და (8.6), (7.19) აღნიშვნებს, მივიღებთ (8.5) უტოლობას.

ლემა 7.2-ის ანალოგიურად, (4.1), (4.2) ამოცანის ამოხსნადობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ (8.12)-ისა და (8.6)-ის თანახმად, $\boldsymbol{u}_h^n$, $\boldsymbol{v}_h^n$, $\boldsymbol{f}_h^n$, $\boldsymbol{u}_h^n$, $\boldsymbol{\psi}_h^n$ ვექტორების ნორმები თანაბრად შემოსაზღვრულია h-ის მიმართ.

ლემა დამტკიცებულია.

8.3. სხვაობიანი სქემის ცდომილების შეფასება. შემოვიღოთ სიდიდე

$$\alpha_2 = \frac{3}{2}\left(\gamma + s_1\left(1 + 2(6)^{\frac{1}{2}}\right)\frac{b}{h}\right) \tag{8.14}$$

და ჩამოვაყალიბოთ შედეგი სხვაობიანი სქემის სიზუსტის შესახებ.

თ ე ო რ ე მ ა 8 . 1 . თუ ბადის ბიჯი აკმაყოფილებს შეზღუდვას

$$0 < \tau \leq \frac{1-\varepsilon}{\alpha_2}, \tag{8.15}$$

სადაც ε არის ნებისმიერი რიცხვი (0,1) ინტერვალიდან, მაშინ n-ურ დროის შრეზე, $n = 1.2, \dots, P$, (4.4), (4.5) სხვაობიანი სქემის ცდომილებისათვის მართებულია შეფასება

$$\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h \leq C_2 \max_{0\leq l\leq n}\left\|\boldsymbol{\theta}_h^l\right\|_h. \tag{8.16}$$

აქ

$$C_2 = \frac{3}{2\alpha_2}\exp\left(2t_n\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right). \tag{8.17}$$

კერძოდ, თუ (3.2) ფუნქციებისთვის სრულდება პირობა

$$u_i(t),\ v_j(t),\ f_i(t),\ \varphi_j(t),\ \psi_j(t) \in C^2[0,T], \tag{8.18}$$

$i = 1,2,\dots,N-1$, $j = 0,1,\dots,N$, მაშინ

$$\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h \leq c_2\tau, \tag{8.19}$$

სადაც

$$c_2 = \left(m_{y,2} + \frac{1}{2}\left(\gamma m_{y,1} + s_1\left(1 + 2(6)^{\frac{1}{2}}\right)\frac{b}{h} m_{v,1}\right)\right) C_2. \tag{8.20}$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნები

$$m_{y,l} = m_{u,l} + m_{v,l} + m_{f,l} + m_{\varphi,l} + m_{\psi,l}, \;\; l = 1,2,$$

$$m_{\lambda,l} = \max_i \max_t \left|\frac{d^l \lambda_i(t)}{dt^l}\right|, \;\; \lambda = u, f, \;\; m_{\mu,l} = \max_j \max_t \left|\frac{d^l \mu_j(t)}{dt^l}\right|, \;\; \mu = v, \varphi, \psi,$$

$$i = 1,2,\dots,N-1, \quad j = 0,1,\dots,N, \qquad t \in [0,T].$$

დამტკიცება. (8.2)-ის თანახმად,

$$\boldsymbol{z}_h^n = \boldsymbol{z}_h^{n-1} + \tau A^{-1}\left(\frac{1}{2}B(\boldsymbol{z}_h^n + \boldsymbol{z}_h^{n-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{1}\left(C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-i})\big)\boldsymbol{y}_h(t_{n-j}) - C\big(\boldsymbol{v}_h^{n-i}\big)\boldsymbol{y}_h^{n-j}\right) + \boldsymbol{\theta}_h^n\right).$$

თუ გამოვიყენებთ (6.2), (8.14) და (6.6), (7.21), (8.5), (6.1a) და (8.1)-დან გამომდინარე გამოსახულებას

$$\left\|C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-i})\big)\boldsymbol{y}_h(t_{n-j}) - C\big(\boldsymbol{v}_h^{n-i}\big)\boldsymbol{y}_h^{n-j}\right\|_h$$
$$\le \frac{b}{2h}\Bigg(\left(\|\boldsymbol{v}_h(t_{n-i})\|_{K,h}^n + \left\|\boldsymbol{v}_h^{n-i}\right\|_{K,h}^n\right)\left\|\boldsymbol{y}_h(t_{n-j}) - \boldsymbol{y}_h^{n-j}\right\|_h$$
$$+ \left(\|\boldsymbol{v}_h(t_{n-i})\|_{K,h} + \left\|\boldsymbol{v}_h^{n-i}\right\|_{K,h}\right)\left(\left\|\boldsymbol{v}_h(t_{n-j})\right\|_h + \left\|\boldsymbol{v}_h^{n-j}\right\|_h\right)\left\|\boldsymbol{y}_h(t_{n-i}) - \boldsymbol{y}_h^{n-i}\right\|_h\Bigg)$$
$$\le s_1\left(\left\|\boldsymbol{z}_h^{n-j}\right\|_h + 2(6)^{\frac{1}{2}}\left\|\boldsymbol{z}_h^{n-i}\right\|_h\right)\frac{b}{h},$$

მივიღებთ უტოლობას

$$\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h \le \|\boldsymbol{z}_h^{n-1}\|_h + \frac{3}{2}\tau\alpha_2(\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h + \|\boldsymbol{z}_h^{n-1}\|_h) + 3\tau\|\boldsymbol{\theta}_h^n\|_h.$$

ამრიგად,

$$\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h \le \frac{1 + \alpha_2\tau}{1 - \alpha_2\tau}\|\boldsymbol{z}_h^{n-1}\|_h + \frac{3\tau}{1 - \alpha_2\tau}\|\boldsymbol{\theta}_h^n\|_h.$$

ამ გამოსახულების, (8.15)-ისა და (8.3)-ის საფუძველზე,

$$\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h \le \left(1 + 2\tau\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right)^n \left\|\boldsymbol{z}_h^0\right\|_h$$
$$+ \tau\frac{3}{\varepsilon}\sum_{l=0}^{n-1}\left(1 + 2\tau\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right)^l \left\|\boldsymbol{\theta}_h^{n-l}\right\|_h \le \frac{3}{2\alpha_2}\left(1 + 2t_n\frac{\alpha_2}{\varepsilon n}\right)^n \max_{0\le l\le n}\left\|\boldsymbol{\theta}_h^l\right\|_h.$$

(8.17) აღნიშვნის გამოყენების შედეგად მიიღება (8.16) შეფასება.

ახლა ჩვენს მიზანს წარმოადგენს $\boldsymbol{\theta}_h^l$ აპროქსიმაციის ცდომილების შეფასება. შემოვიღოთ რამდენიმე აღნიშვნა (3.13a) ვექტორის წარმოებულებისთვის. ვთქვათ,

$\frac{dy_h(t_{n-1,n,l})}{dt}$, $l = 1, 2$, და $\frac{d^2y_h(t_{n-1,n})}{dt^2}$ ნიშნავს, რომ $\frac{dy_h}{dt}$, $l = 1,2$, და $\frac{d^2y_h}{dt^2}$ ვექტორების არგუმენტის მნიშვნელობები წარმოადგენენ გარკვეულ რიცხვებს $[t_{n-1}, t_n]$ სეგმენტი-დან. ზოგად შემთხვევაში, ყოველი განხილული ვექტორის კომპონენტისათვის, ეს რიცხვები საზოგადოთ განსხვავდება ერთმანეთისგან.

თუ (8.4)-ში გამოვიყენებთ ტეილორის მწკრივად გაშლის ფორმულას და (3.11) განტოლებას, როცა $t = t_{n-1}$, მივიღებთ

$$\boldsymbol{\theta}_h^n = A\frac{d\boldsymbol{y}_h(t_{n-1})}{dt} - \Big(B + C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\big)\Big)\boldsymbol{y}_h(t_{n-1}) + \sum_{i=1}^{3}\rho_i = \sum_{i=1}^{3}\rho_i, \qquad (8.21)$$

სადაც

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\tau\left(A\frac{d^2\boldsymbol{y}_h(t_{n-1,n})}{dt^2} - B\frac{d\boldsymbol{y}_h(t_{n-1,n,1})}{dt}\right), \quad \rho_2 = -\frac{1}{2}\tau C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\big)\frac{d\boldsymbol{y}_h(t_{n-1,n,2})}{dt},$$

$$\rho_3 = -\frac{1}{4}\Big(C\big(\boldsymbol{v}_h(t_n)\big) - C\big(\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\big)\Big)\big(\boldsymbol{y}_h(t_n) + \boldsymbol{y}_h(t_{n-1})\big).$$

(6.2)-ისა და (8.18)-ის თანახმად,

$$\|\rho_1\|_h \le \frac{1}{2}\tau\left(2\max_t\left\|\frac{d^2\boldsymbol{y}_h(t)}{dt^2}\right\|_h + \gamma\max_t\left\|\frac{d\boldsymbol{y}_h(t)}{dt}\right\|_h\right),$$

ხოლო (3.14c), (7.21),(6.1c) და (6.1a) გამოსახულებებიდან მიიღება

$$\|\rho_2\|_h \le \frac{1}{2}\tau\frac{b}{h}s_1\max_t\left\|\frac{d\boldsymbol{v}_h(t)}{dt}\right\|_h,$$

$$\|\rho_3\|_h \le \frac{1}{4}\frac{b}{h}\left|\|\boldsymbol{v}_h(t_n)\|_{K,h}^2 - \|\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\|_{K,h}^2\right|\left(\|\boldsymbol{v}_h(t_n)\|_h + \|\boldsymbol{v}_h(t_{n-1})\|_h\right)$$

$$\le \tau\frac{b}{h}s_1(6)^{\frac{1}{2}}\max_t\left\|\frac{d\boldsymbol{v}_h(t)}{dt}\right\|_h,$$

სადაც $t \in [0, T]$. თუ (8.16)-ში გამოვიყენებთ ამ უტოლობებს (8.21)-თან ერთად, მივი-ღებთ (8.19)-ს.

თეორემა დამტკიცებილია.

9. იტერაციული პროცესის სიზუსტე

9.1. ცდომილების განსაზღვრება. აქ ჩვენს მიზანს წარმოადგენს (5.1) იტერაციული პროცესის ცდომილების შეფასება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შესაფასებელია ვექტორი

$$\boldsymbol{z}_h^{n,m} = \boldsymbol{y}_h^n - \boldsymbol{y}_h^{n.m}, \qquad (9.1)$$

რომელიც არის სხვაობა (4.1) სხვაობიანი სქემის ამონახსნსა და (5.1) პროცესის m-ურ მიახლოებას შორის.

9.2. დამხმარე უტოლობა. შევაფასოთ (4.3) ვექტორის ნორმა. ამისათვის დაგვჭირდება s_2 სიდიდე, რომელიც განისაზღვრება (3.13b) საწყისი ვექტორის კომპონენტების საშუალებით

$$s_2 = (\|\boldsymbol{w}^1\|_h^2 + \|\boldsymbol{w}_x^2\|_h^2 + \|\boldsymbol{\psi}^1\|_h^2 + \|\boldsymbol{\psi}_x^2\|_h^2 + \|\boldsymbol{\psi}^2\|_h^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(2T\frac{\alpha_3}{\varepsilon}\right). \qquad (9.2)$$

აქ ε ნებისმიერი რიცხვია $(0,1)$ ინტერვალიდან და

$$\alpha_3 = \frac{3}{2}\left(\gamma + s_1\frac{b}{h}\right). \qquad (9.3)$$

ლ ე მ ა 9 . 1 . თუ ბადის ბიჯი აკმაყოფილებს პირობას

$$0 < \tau \le \frac{1-\varepsilon}{\alpha_3}, \qquad (9.4)$$

მაშინ მართებულია შეფასება

$$\|\boldsymbol{y}_h^n\|_h \le s_2, \qquad (9.5)$$
$$n = 1,2,\dots,P.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (4.4)-ის თანახმად,

$$\boldsymbol{y}_h^n = \boldsymbol{y}_h^{n-1} + \frac{1}{2}\tau A^{-1}\left(B + \frac{1}{2}\left(C(\boldsymbol{v}_h^n) + C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\right)\right)(\boldsymbol{y}_h^n + \boldsymbol{y}_h^{n-1}). \qquad (9.6)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ, (3.14c), (6.1c) და (8.5) ძალით,

$$\left\|C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\boldsymbol{y}_h^{n-j}\right\|_h \le \frac{b}{h}\left\|\boldsymbol{v}_h^{n-i}\right\|_{K,h}^2\left\|\boldsymbol{y}_h^{n-j}\right\|_h \le s_1\frac{b}{h}\left\|\boldsymbol{y}_h^{n-j}\right\|_h$$

და გამოვიყენებთ (6.2)-ს, (9.3)-ს, მაშინ (9.6)-დან მივიღებთ

$$\|\boldsymbol{y}_h^n\|_h \le \|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h + \tau\frac{3}{2}\left(\gamma + s_1\frac{b}{h}\right)(\|\boldsymbol{y}_h^n\|_h + \|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h)$$
$$\le \|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h + \tau\alpha_3(\|\boldsymbol{y}_h^n\|_h + \|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h).$$

ამრიგად, თუ ადგილი აქვს (9.4)-ს, მაშინ სრულდება უტოლობა

$$\|\boldsymbol{y}_h^n\|_h \le \left(1 + 2\tau\frac{\alpha_3}{\varepsilon}\right)\|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h,$$

რომელიც (4.5), (3.13b) და (9.2)-თან ერთად გვაძლევს (9.5)-ს.

ლემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. თუ ვისარგებლებთ რამდენიმე გამოსახულებით ლემა 8.1-ის დამტკიცებიდან, რაც მთავარია, (8.12)-ის უტოლობით, მივიღებთ (9.5) შეფასებას τ ბიჯზე შეზღუდვის გარეშე, რომელშიც s_2 პარამეტრი განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$s_2 = 3b\left(s_1 + \left(s_1 - \frac{a}{b}\right)^2\right)\max_{1\le i\le 3}(1, r_i)\,,\ \ r_1 = \frac{8}{b},\ \ r_2 = \frac{c}{2},\ \ r_3 = \frac{2}{cd}\,.$$

9.3. იტერაციული პროცესის ცდომილება. ჩამოვაყალიბოთ შედეგი (5.1) იტერაციული პროცესის კრებადობის და სიზუსტის შესახებ.

თ ე ო რ ე მ ა 9.1. დავუშვათ, რომ ბადის ბიჯი, (9.4)-ის გარდა, აკმაყოფილებს პირობას

$$0 < \tau\left(\gamma + \frac{3b}{h}\left(k_1 + k_2\tau\frac{\alpha_3}{1-q} + k_3\left(\tau\frac{\alpha_3}{1-q}\right)^2\right)s_2^2\right) \le \frac{2}{3}q, \tag{9.7}$$

სადაც $k_1 = 1,\ k_2 = 2\frac{2}{3},\ k_3 = 2,$ ხოლო q არის ნებისმიერი რიცხვი (0,1) ინტერვალიდან. მაშინ (5.1) იტერაციული პროცესი იკრიბება (4.4) სისტემის ამონახსნისაკენ და პროცესის ცდომილებისათვის სრულდება შეფასება

$$\left\|\boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h \le C_3 q^m,\quad m = 1, 2, \ldots. \tag{9.8}$$

აქ

$$C_3 = \tau s_2 \alpha_3 \frac{2}{1-q}\,. \tag{9.9}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (5.1)-დან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_h^{n,m+1} - \boldsymbol{y}_h^{n,m} = \frac{\tau}{2}A^{-1}\Bigg[\left(B + \frac{1}{2}C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\right)\left(\boldsymbol{y}_h^{n,m} - \boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right) \\ + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{1}(-1)^l C\left(\boldsymbol{v}_h^{n,m-l}\right)\left(\boldsymbol{y}_h^{n,m-l} + \boldsymbol{y}_h^{n-1}\right)\Bigg], \\ m = 1, 2, \ldots\,.\end{aligned} \tag{9.10}$$

(6.6)-ისა და (3.14c)-ის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left\|C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})(\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1})\right\|_h \le \frac{b}{h}\|\boldsymbol{v}_h^{n-1}\|_{K,h}^2\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h,$$
$$\left\|C(\boldsymbol{v}_h^{n,m})\boldsymbol{y}_h^{n,m}-C(\boldsymbol{v}_h^{n,m-1})\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h$$
$$\le \frac{b}{2h}\sum_{l=0}^{1}\sum_{i=0}^{1}\left\|\boldsymbol{v}_h^{n,m-i}\right\|_{K,h}^{2-l}\left(\sum_{j=0}^{1}\left\|\boldsymbol{v}_h^{n,m-j}\right\|_h\right)^l\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h, \tag{9.11}$$
$$\left\|\left(C(\boldsymbol{v}_h^{n,m})-C(\boldsymbol{v}_h^{n,m-1})\right)\boldsymbol{y}_h^{n-1}\right\|_h$$
$$\le \frac{b}{h}\sum_{l=0}^{1}\left\|\boldsymbol{v}_h^{n,m-l}\right\|_{K,h}\|\boldsymbol{v}_h^{n-1}\|_h\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h.$$

აგრეთვე გვჭირდება (6.1a), (4.3) და (5.2)-დან გამომდინარე შეფასებები

$$\|\boldsymbol{v}_h^{n-1}\|_{K,h} \le \|\boldsymbol{v}_h^{n-1}\|_h \le \|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h,$$
$$\left\|\boldsymbol{v}_h^{n,m-l}\right\|_{K,h} \le \left\|\boldsymbol{v}_h^{n,m-l}\right\|_h \le \left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m-l}\right\|_h, \tag{9.12}$$
$$l = 0, 1.$$

(9.10)-(9.12) და (6.2) გამოყენების შედეგად მივიღებთ

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m+1}-\boldsymbol{y}_h^{n,m}\right\|_h \le \frac{3\tau}{2}\Big(\gamma+\frac{b}{2h}\Big(\|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h^2+\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}\right\|_h^2+\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h^2$$
$$+\|\boldsymbol{y}_h^{n-1}\|_h\left(\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}\right\|_h+\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h\right)+\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}\right\|_h\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h\Big)\Big)\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h, \tag{9.13}$$
$$m = 1, 2, \dots.$$

(5.1)-დან და (5.3)-დან გვაქვს

$$A\boldsymbol{y}_h^{n,1} = A\boldsymbol{y}_h^{n,0}+\tau\Big(B+C(\boldsymbol{v}_h^{n-1})\Big)\boldsymbol{y}_h^{n-1},$$

რის გამოც (6.2), (3.14c), (3.9d)-ისა და (8.5), (9.5), (9.3)-ის საფუძველზე

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,1}-\boldsymbol{y}_h^{n,0}\right\|_h \le \sigma, \quad \left\|\boldsymbol{y}_h^{n,1}\right\|_h \le s_2+\sigma, \tag{9.14}$$

სადაც

$$\sigma = 2\tau s_2\alpha_3. \tag{9.15}$$

თუ გამოვიყენებთ σ პარამეტრს, მაშინ (9.7) პირობის მარჯვენა უტოლობა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$\frac{3\tau}{2}\left(\gamma+\frac{b}{2h}\sum_{l=0}^{2}(l+1)\,s_2^{2-l}\left(s_2+\sigma\frac{1}{1-q}\right)^l\right) \le q. \tag{9.16}$$

(9.13)-(9.16) და (9.5), (5.3) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,2}-\boldsymbol{y}_h^{n,1}\right\|_h \le q\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,1}-\boldsymbol{y}_h^{n,0}\right\|_h \le \sigma q. \tag{9.17a}$$

(9.17a)-ისა და (9.14)-ს ძალით,

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,2}\right\|_h \le \left\|\boldsymbol{y}_h^{n,1}\right\|_h+\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,2}-\boldsymbol{y}_h^{n,1}\right\|_h \le s_2+\sigma(1+q). \tag{9.17b}$$

ვთქვათ, სრულდება უტოლობები

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h \le q\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-2}\right\|_h, \tag{9.18a}$$

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}\right\|_h \le s_2+\sigma\sum_{i=0}^{m-1}q^i, \tag{9.18b}$$

$$1<m\le l\,.$$

თუ (9.18b) და (9.14)-დან გამომდინარე

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l-i}\right\|_h \le s_2+\sigma\frac{1}{1-q}\,,\quad i=0,1,$$

უტოლობას ჩავსვამთ (9.13)-ში $m=l$-თვის, და, გარდა ამისა, გამოვიყენებთ (9.17)-სა და (9.5)-ს, მივიღებთ

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l+1}-\boldsymbol{y}_h^{n,l}\right\|_h \le q\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l}-\boldsymbol{y}_h^{n,l-1}\right\|_h. \tag{9.19a}$$

ამ ფორმულიდან და (9.18a), (9.14)-დან მიიღება უტოლობა

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l+1}-\boldsymbol{y}_h^{n,l}\right\|_h \le \sigma q^l,$$

რომლის, $m=l$-თვის (9.18b)-თან ერთად, გამოყენების შედეგად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l+1}\right\|_h \le \left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l}\right\|_h+\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,l+1}-\boldsymbol{y}_h^{n,l}\right\|_h \le s_2+\sigma\sum_{i=0}^{m-1}q^i. \tag{9.19b}$$

(9.19)-დან გამომდინარეობს, რომ (9.18) სრულდება $m=l+1$-თვის. (9.17)-თან ერთად ეს ნიშნავს, რომ (9.18) მართებულია ნებისმიერი $m>l$-თვის. (9.18a) და (9.14)-დან გამომდინარეობს

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m}-\boldsymbol{y}_h^{n,m-1}\right\|_h \le \sigma q^{m-1}, \tag{9.20}$$

სადაც $m\ge 1$.

ვაჩვენოთ, რომ $\{y_h^{n,m}\}$, $m=0,1,\dots,$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. (9.20)-ის გამო, ნებისმიერი ნატურალური l რიცხვისთვის, გვაქვს

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m+l}-\boldsymbol{y}_h^{n}\right\|_h \le \sum_{i=1}^{l}\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m+i}-\boldsymbol{y}_h^{n,m+i-1}\right\|_h \le \sigma\sum_{i=1}^{l}q^{m+i-1}\le\sigma\frac{q^m}{1-q}$$

და, მაშასადამე,

$$\left\|\boldsymbol{y}_h^{n,m+l}-\boldsymbol{y}_h^{n}\right\|_h \le \sigma\frac{q^m}{1-q}\,, \tag{9.21}$$

$m=0,1,\dots,\ \ l=1,2,\dots$. ნებისმიერი l-თვის (9.21)-ის მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $m\to\infty$. ამრიგად, $\{y_h^{n,m}\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. მას გააჩნია

ზღვარი. გადავიდეთ ზღვარზე (5.1)-ში, როცა $m \to \infty$. თუ გამოვიყენებთ A და B მატ-რიცების უწყვეტობის თვისებას და (6.6) უტოლობას C მატრიცისთვის, მივალთ დას-კვნამდე, რომ $\{y_h^{n,m}\}$ მიმდევრობის ზღვარი (4.4) განტოლების ამონახსნია. ამრიგად,

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{y}_h^{n,m} = \boldsymbol{y}_h^n.$$

გადავიდეთ ზღვარზე (9.21)-ში, როცა $l \to \infty$, და გამოვიყენოთ (9.1), (9.15) და (9.9) გან-საზღვრებები. მივიღებთ

$$\left\|\boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h = \left\|\boldsymbol{y}_h^n - \boldsymbol{y}_h^{n,m}\right\|_h \le \sigma \frac{q^m}{1-q} = C_3 q^m.$$

მაშასადამე, (9.8) მართებულია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ქვემოთ დაგვჭირდება (9.9)-ით განსაზღვრული C_3 კოეფიციენტის სხვა აღნიშვნა, სახელდობრ,

$$c_3 = C_3. \tag{9.22}$$

10. ალგორითმის სრული ცდომილება

10.1. სრული ცდომილების განსაზღვრება. ამოცანის ზუსტი ამონახსნი აღიწერება $\boldsymbol{y}(t)$ ვექტორ-ფუნქციით (7.2)-დან. მისი მნიშვნელობა დროის $t = t_n$ მომენტში არის $\boldsymbol{y}(t_n)$ ვექტორი, რომელსაც ალგორითმის რეალიზების შედეგად ვუახლოვდებით $\boldsymbol{y}_h^{n,m}$-ით. $\boldsymbol{y}_h^{n,m}$ ვექტორში ასახულია სასრულ ელემენტთა მეთოდის, სხვაობიანი სქემისა და იტერაციული პროცესის შედეგები. აქედან გამომდინარე, ბუნებრივი იქნება ალგო-რითმის სრული ცდომილება განვსაზღვროთ როგორც სხვაობა

$$\Delta\boldsymbol{z}_h^{n,m} = \boldsymbol{y}(t_n) - \boldsymbol{y}_h^{n,m}. \tag{10.1}$$

შევნიშნოთ, რომ (7.2)-ისა და (5.2)-ის თანახმად,

$$\left\|\Delta\boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h = \Big(\left\|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{u}_h^{n,m}\right\|_h^2 + \left\|\boldsymbol{v}(t_n) - \boldsymbol{v}_h^{n,m}\right\|_h^2$$
$$+\left\|\boldsymbol{f}(t_n) - \boldsymbol{f}_h^{n,m}\right\|_h^2 + \left\|\boldsymbol{\varphi}(t_n) - \boldsymbol{\varphi}_h^{n,m}\right\|_h^2 + \left\|\boldsymbol{\psi}(t_n) - \boldsymbol{\psi}_h^{n,m}\right\|_h^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.2}$$

10.2. ალგორითმის სრული ცდომილების შეფასება. (10.1) და (7.3), (8.1), (9.1) ფორმუ-ლებიდან ვასკვნით, რომ

$$\Delta\boldsymbol{z}_h^{n,m} = \big(\boldsymbol{y}(t_n) - \boldsymbol{y}_h(t_n)\big) + (\boldsymbol{y}_h(t_n) - \boldsymbol{y}_h^n) + \big(\boldsymbol{y}_h^n - \boldsymbol{y}_h^{n,m}\big) = \boldsymbol{z}_h(t_n) + \boldsymbol{z}_h^n + \boldsymbol{z}_h^{n.m}.$$

ამრიგად,

$$\left\|\Delta \boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h \le \|\boldsymbol{z}_h(t_n)\|_h + \|\boldsymbol{z}_h^n\|_h + \left\|\boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h. \qquad (10.3)$$

(10.3)-ში $\|\boldsymbol{z}_h(t_n)\|_h$,$\|\boldsymbol{z}_h^n\|_h$, $\left\|\boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h$ შეფასებისთვის გამოვიყენოთ თეორემები 7.1, 8.1 და 9.1 შედეგად მიიღება

თ ე ო რ ე მ ა 1 0 . 1 . დავუშვათ, (1.3)-ის გარდა,

$$v(x,t) \in C^{p,0}([0,1] \times [0,T]),$$

სადაც $p = 1$ ან $p = 2$ და τ-თვის სრულდება (8.15), (9.4) და (9.7) უტოლობები. მაშინ შერჩეული h და τ-თვის $t = t_n$ შრეზე m-ურ იტერაციულ ბიჯზე ალგორითმის სრული ცდომილებისთვის მართებულია შეფასება

$$\left\|\Delta \boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h \le C_1 \max_{0\le t\le t_n} \|\boldsymbol{\theta}_h(t)\|_h + C_2 \max_{0\le l\le n} \left\|\boldsymbol{\theta}_h^l\right\|_h + C_3 q^m,$$

სადაც C_k, $k = 1, 2, 3$, კოეფიციენტებია, რომლებიც განისაზღვრება (7.35), (8.17), (9.9) ფორმულების საშუალებით, $\boldsymbol{\theta}_h(t)$, $\boldsymbol{\theta}_h^l$ სასრულ ელემენტთა სისტემის და სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებები, რომლებიც განისაზღვრება (7.6) და (8.4) ფორმულების საშუალებით, q არის ნებისმიერი რიცხვი $(0,1)$ ინტერვალიდან, რომელიც აკმაყოფილებს (9.7) შეზღუდვას.

კერძოდ, თუ (2.1) და (3.2) ფუნქციებისთვის სრულდება პირობები

$$u(x,t),\ v(x,t),\ f(x,t),\ \varphi(x,t) \in C^{2,1}([0,1] \times [0,T]),$$

$$\psi(x,t) \in C^{1,1}([0,1] \times [0,T])$$

და

$$u_i(t),\ v_j(t),\ f_i(t),\ \varphi_j(t),\ \psi_j(t) \in C^2[0,T],$$

მაშინ

$$\left\|\Delta \boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h \le c_1 h + c_2 \tau + c_3 q^m,$$

სადაც c_k, $k = 1, 2, 3$, კოეფიციენტები განისაზღვრება (7.38), (8.20), (9.22) ფორმულებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4 . ალგოროთმის რეალიზების შედეგად $w(x,t)$ ფუნქციის მიახლოების აგების საკითხი განხილულია [60] პუბლიკაციაში.

10.3. რიცხვითი ექსპერიმენტი. აქ განხილული ალგორითმი გამოყენებული იქნა შემდეგი არაერთგვაროვანი სისტემის ამოსახსნელად

$$w_{tt} = \left(cd - a + b \int_0^1 w_x^2 dx \right) w_{xx} - cd\psi_x + \alpha(x,t),$$

$$\psi_{tt} = c\psi_{xx} - c^2 d(\psi - w_x) + \beta(x,t),$$

$$0 < x < 1, \ \ 0 < t \leq 1.$$

მოვიყვანოთ გამოთვლების შედეგები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1 . ვთქვათ,

$$a = 0.3, \quad b = 0.2, \quad c = 1.0, \quad d = 0.5,$$

$$\alpha(x,t) = \left(\frac{2}{5} - \pi^2 x(1-x)\right)\sin \pi t + \frac{2}{15}\sin^3 \pi t + \frac{1}{2}\Big(1 - \exp(xt)\left(1 + t(x-1)\right)\Big),$$

$$\beta(x,t) = \frac{1}{2}\big((x-1) + (2x-1)\sin \pi t\big) - \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) - (2 + (x-1)t)t\right)\exp(xt),$$

და საწყისი ფუნქციები

$$w^1(x) = \pi x(1-x), \ \ w^2(x) = 0, \quad \psi^1(x) = -x(x-1), \ \ \psi^2 = 0.$$

ზუსტს ამონახსნს და (2.1) ფუნქციებს აქვს შემდეგი სახე

$$w = x(1-x)\sin \pi t\,, \ \ \psi = (x-1)(1 - \exp(xt))$$

და

$$u = \pi x(1-x)\cos \pi t\,, \quad v = (1-2x)\sin \pi t\,, \quad f = x(1-x)\exp(xt),$$

$$\varphi = 1 - \exp(xt)\,(1 + (x-1)t), \ \ \psi = (x-1)(1 - \exp(xt)).$$

რამდენიმე შემთხვევისთვის ალგორითმის სრული ცდომილების (10.2) ნორმის მნიშვნელობა მოცემულია ცხრილი 3-ში.

ცხრილი 3

N	h	τ	n	t_n	m	$\left\Vert \Delta \boldsymbol{z}_h^{n,m} \right\Vert_h$
1	0.1	0.1	5	0.5	10	0.0369772
2	0.05	0.05	10	0.5	20	0.0135773
3	0.025	0.025	40	1.0	20	0.0096951

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2 . ვთქვათ,

$$a = 0.3, \quad b = 0.2, \quad c = 1.0, \quad d = 0.5,$$

$$\alpha(x,t) = \pi^2 \sin \pi x\,(0.2 + 0.1\pi^2(t-1)^4)(t-1)^2 + 2\sin \pi x + 0.5(t+1)^2 \pi \cos \pi x,$$

$$\beta(x,t) = 0.5((t+1)^2 \sin \pi x - (t-1)^2 \pi \cos \pi x) + (2 + (t+1)^2 \pi^2)\sin \pi x,$$

და საწყისი ფუნქციები

$$w^1(x) = -2\sin\pi x, \quad w^2(x) = \pi\cos\pi x,$$
$$\psi^1(x) = 2\sin\pi x, \quad \psi^2(x) = \sin\pi x.$$

ზუსტს ამონახსნს და (2.1) ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე

$$w = (t-1)^2\sin\pi x, \qquad \psi = (t+1)^2\sin\pi x$$

და

$$u = 2(t-1)\sin\pi x, \quad v = (t-1)^2\pi\cos\pi x, \quad f = 2(t+1)\sin\pi x,$$
$$\varphi = (t+1)^2\pi\cos\pi x, \quad \psi = (t+1)^2\sin\pi x.$$

რამდენიმე შემთხვევისთვის ალგორითმის სრული ცდომილების (10.2) ნორმის მნიშვნელობა მოცემულია ცხრილი 4-ში.

ცხრილი 4

N	h	τ	n	t_n	m	$\lVert\Delta \boldsymbol{z}_h^{n,m}\rVert_h$
1	0.1	0.01	100	1.0	10	0.4172802083
2	0.02	0.002	500	1.0	10	0.0405548647
3	0.01	0.001	1000	1.0	10	0.0147005675
4	0.003	0.001	1000	1.0	10	0.0028410878

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3 . ვთქვათ,

$$a = 0.3, \quad b = 0.2, \quad c = 1.0, \quad d = 0.5,$$
$$\alpha(x,t) = 2\left((1-x)x^2 + \frac{1}{5}t^2(3x-1)(1+\frac{2}{15}t^4)\right) + \left(-x + \frac{1}{2}t(1-x^2)\right)\exp(xt),$$
$$\beta(x,t) = \left(-1+\frac{3}{2}x\right)xt^2 + \left(\frac{5}{2} + 4xt - t^2 + \left(\frac{1}{2} - x^2 + t^2\right)x^2\right)\exp(xt)$$

და საწყისი ფუნქციებია

$$w^1(x) = 0, \quad w^2(x) = 0,$$
$$\psi^1(x) = x(1-x)^2, \quad \psi^2(x) = 1 - x^2.$$

ზუსტს ამონახსნს და (2.1) ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე

$$w = (1-x)x^2t^2, \quad \psi = (1-x)^2\exp(xt)$$

და

$$u = 2(1-x)x^2t, \quad v = (2-3x)xt^2, \quad f = (1-x^2)x\, exp(xt),$$
$$\varphi = (-2x + (1-x^2)t)\exp(xt), \quad \psi = (1-x)^2\exp(xt).$$

რამდენიმე შემთხვევისთვის ალგორითმის სრული ცდომილების (10.2) ნორმის მნიშვნელობა მოცემულია ცხრილი 5-ში.

ცხრილი 5

N	h	τ	n	t_n	m	$\left\|\Delta \boldsymbol{z}_h^{n,m}\right\|_h$
1	0.1	0.01	100	1.0	10	0.207770907318323
2	0.02	0.002	500	1.0	10	0.018525780152704
3	0.01	0.001	1000	1.0	10	0.006627663802431
4	0.003	0.001	1000	1.0	10	0.001243702027224

მაგალითი 1-ის ყოველი ვარიანტის რეალიზაციის დრო არ აღემატებოდა 10 წამს. მაგალითი 3-ის ამოხსნისთვის დახარჯული დროის მონაცემები ვარიანტების მიხედვით მოცემულია ცხრილი 6-ში.

ცხრილი 6

N	1	2	3	4
დრო (წმ)	0.054275	0.725173	10.746824	113.878027

რიცხვითი ექსპერიმენტი ჩატარდა კომპიუტერული პროგრამის Matlab R2010a საშუალებით. გამოყენებული კომპიუტერის მონაცემებია: CPU Ryzen 5 3600, RAM DDR4 2933 16GB, OCWindows 10 Enterpise 6420H2.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი წარმოადგენს გამოთვლითი მექანიკის მიმართულებით ჩატარებულ კვლევას. ჩვენ მიერ აგებული ალგორითმების საშუალებით შესაძლებელია შესწავლილ იქნას ძელების დინამიკური ყოფაქცევა, რაც მნიშვნელოვანია სამშენებლო კონსტრუქციების დაპროექტების დროს. ეს გარემოება გვაძლევს საფუძველს ვივარაუდოთ, რომ ნაშრომში მიღებულ შედეგებს ექნება პრაქტიკული გამოყენება.

წინასწარმა კვლევამ გვიჩვენა აგრეთვე, რომ დისერტაციაში გამოყენებული სივრცული ცვლადის მიმართ ამონახსნის მიახლოების მიდგომის წარმატებით გამოყენება შესაძლებელია ორგანზომილებიანი დრეკადი სხეულებისა და სხვა მსგავსი არაწრფივობის მქონე ფიზიკური შინაარსის ამოცანებში. მაგალითად, პროექციული მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილი აღმოჩნდა დიფუზიის პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური არაწრფივი განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისა და სიზუსტის კვლევის შემთხვევაშიც.

ლიტერატურა

1. Almeida Júnior D. S., Conservative semidiscrete difference schemes for Timoshenko systems. J. Appl. Math. **2014**, Art. ID 686421, 7 pp.
2. Ammari K., Global existence and uniform stabilization of a nonlinear Timoshenko beam. Portug. Math. **59** (2002), 125-140.
3. Arosio A., On the nonlinear Timoshenko-Kirchhoff beam equation. Chin. Ann. Math., Ser. B **20** (1999), 495-506.
4. Bae J. J., Park J. Y., Jeong J. M., On uniform decay of solutions for wave equation of Kirchhoff type with nonlinear boundary and memory source term. Appl. Math. Comp. **138** (2003), no. 2-3, 463-478.
5. Balachandran K., Park J. Y., Existence of solutions of a class of abstract second order nonlinear integro-differential equations. J. Appl. Math. Stoch. Anal. **15** (2002), no. 2, 115-124.
6. Balachandran K., Park J. Y., Jung I. M., Existence of solutions of nonlinear extensible beam equations. Math. Comp. Model. **36** (2002), no. 7-8, 747-754.
7. Ball J., Stability theory for an extensible beam. J. Diff. Equ. **14** (1973), 399-418.
8. Beckenbach E., Bellman R., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. N. F., Bd. 30 Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.
9. Berger H. M., A new approach to the analysis of a large deflections of plates. J. Appl. Mech. **22** (1955), no. 4, 465-472.
10. Berikelashvili G., Papukashvili A., Peradze J., Iterative solution of a nonlinear static beam equation. Ukrainian Math. J. **72** (2021), no. 8, 1185-1196.
11. Bernardi C., Copetti M. I. M., Discretization of a nonlinear dynamic thermoviscoelastic Timoshenko beam model. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **97** (2017), no. 5, 532-549.
12. Bernardi C., Copetti M. I. M., Finite element discretization of a thermoelastic beam. Archive ouverte HAZl-UPMC, 29/05/2013, 23 p.
13. Bernardi C., Copetti M. I. M., Finite element discretization of a nonlinear thermoelastic beam model with penalized unilateral contact. SeMA J. **64** (2014), 41-64.
14. Burden R. L., Faires J. G., Numerical Analysis. Cengagae, 2016.

15. Burgreen D., Free vibration of a pin ended column with constant distance between ends. J. Appl. Mech. **18** (1951), 135-139.

16. Cheng X. L., Xue W. M., Linear finite element approximations for the Timoshenko beam and the shallow arch problems. J. Comput. Math. **20** (2002), no. 1, 15-22.

17. Choo S. M., Chung S. K., Finite difference approximate solutions for the strongly damped extensible beam equations. Appl. Math. Comp. Comp. **112** (2000), no. 1, 11-32.

18. Choo S. M., Chung S. K., Kannan R., Finite element Galerkin solutions for the strongly damped extensible beam equations. Korean J. Comp. Appl. Math. **9** (2002), no. 1, 27-43.

19. Claeyssen J. R., The Timoshenko beam model in vibrating AFM cantilevers. 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications, June 07-11, 2010, pp. 59-70.

20. Cousin A. T., Regular solution of a nonlinear model for vibrations of beams in unbounded domains. Nonl. Anal.: Theor. Meth. Appl. **22** (1994), no. 9, 1153-1162.

21. Cruz-Uribe D., Neugebauer C. J., An elementary proof of error estimates for the trapezoidal rule. Math. Mag. **76** (2003), no. 4, 303-306.

22. De Andrade N. G., On a nonlinear system of partial differential equations. J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), no.1, 119-130.

23. Dickey R. W., Free vibrations and dynamic buckling of the extensible beam. J. Math. Anal. Appl. **29** (1970), 443-454.

24. Ducceschi M., Bilbao S., Conservative finite difference time domain schemes for the prestressed Timoshenko, shear and Euler-Bernoulli beam equations. Wave Motion **89** (2019), 142-165.

25. Elishakoff I., Who developed the so-called Timoshenko beam theory? Math. Mech. Sol. **25** (2020), no. 1, 97-116.

26. Elishakoff I., Handbook on Timoshenko-Ehrenfest beam theory and Uflyand-Mindlin Plate Theories, World Scientific, 2019.

27. Eringen A. C., On the non-linear vibration of elastic bars. Quart. Appl. Math. **9** (1952), 361-369.

28. Feng M. F., Xie X. P., Xiong H. X., Semi-discrete and fully discrete partial projection finite element methods for the vibrating Timoshenko beam. J. Comput. Math. **17** (1999), no. 4, 353-368.

29. Franca L. P., Loula A. F. D., A new mixed finite element method for the Timoshenko beam problem. RAIRO Mod. Math. Anal. Num. **25** (1991), no. 5, 561-578.

30. Li Fu-le, Sun Zhi-zhong, A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback. J. Comput. Appl. Math. **200** (2007), no. 2, 606-627.

31. Golub C. H., Van Loan C. F., Matrix computations, Third edition. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.

32. Henriques de Brito E. M., A nonlinear hyperbolic equation. Inter. J. Math.Math. Sci. **3** (1980), 505-520.

33. Henriques de Brito E. M., Decay estimates for the generalized damped extensible string and beam equations. Nonl. Anal.: Theor. Meth. Appl. **8** (1984), no. 12, 1489-1496.

34. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B., Numerical solutions of three classes of nonlinear parabolic integro-differential equations. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2016.

35. Kantorovich L. V., On Newton's method. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov. **28** (1949). 104-144.

36. Kalichava Z., The exactness of an algorithm step for a dynamic beam. Collec. Scien. Artic. Yerevan State Univ., Natur. Phys.-Math. Sci. **1 (24)** (2018), 95-101.

37. Kalichava Z., Peradze J., Approximation with respect to the spatial variable of the solution of a nonlinear dynamic beam problem. SCCTW 2016, South-Caucasus Computing and Technology Workshop, 15 p.

38. Kalichava Z., Peradze J., Galerkin approximation of the solution of a nonlinear beam equation. Rep. Enlarg. Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. **31** (2017), 67-70.

39. Kalichava Z., Peradze J., The iteration stage of a numerical algorithm for a Timoshenko type beam equation. Appl. Math. Inform. Mech. **23** (2018), no. 1, 23-29.

40. Kim J. U., Renardy Y., Boundary control of the Timoshenko beam. SIAM J. Control Optim. **25** (1987), no. 6, 1417-1429.

41. Kirchhoff G., Vorlesungen über Mechanik. Teubner, Leipzig, 1876.

42. Lions J.-L., Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.

43. Lions J.-L., On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Lectures Notes, Inst. Matem., Universidad Federal do Rio de Janeiro, 1977.

44. Ma T. F., Existence results and numerical solutions for a beam equation with nonlinear boundary conditions. Appl. Numer. Math. **47** (2003), 189-196.

45. Marchuk G., Agoshkov V., Introduction to Projection-Grid Methods. (Russian) Nauka, Moscow, 1981.

46. Medeiros L. A., On a new class of nonlinear wave equations. J. Math. Anal. Appl. **69** (1979), no. 1, 252-262.

47. Medeiros L. A., Limaco J., Menezes S. B., Vibrations of elastic strings: mathematical aspects. I. J. Comput. Anal. Appl. **4** (2002), no. 2, 91-127.

48. Medeiros L. A., Limaco J., Menezes S. B., Vibrations of elastic strings: mathematical aspects. II. J. Comput. Anal. Appl. **4** (2002), no. 3, 211-263.

49. Meladze H., Davitashvili T., Parallel algorithms for solution of one mathematical model of electropower systems. Proc. 8th Intern. Conf. Comput. Sci. Inform. Techn. (CSIT'2011), September 26-30, pp. 259-263, Yerevan, Armenia, 2011.

50. Menzala G. P., Une solution d'une equation non lineaire devolution. C. R. Acad. Sci. Paris **286** (1978), 273-275.

51. Menzala G. P., Zuazua E., The beam equation as a limit of 1D nonlinear von Karman model. Appl. Math. Lett. **12** (1999), 47-52.

52. Menzala G. P., Zuazua E., Timoshenko's beam equation as limit of a nonlinear one-dimensional von Karman system. Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A **130** (2000), 855-875.

53. Narciso V., Cousin A. T., Local solutions for a Timoshenko system in noncylindrical domains. Port. Math. **65** (2008), no. 3, 345-371.

54. Odisharia V., Existence of a solution and validation of the Bubnov-Galerkin method for one-dimensional Reissner system. Comp. Math. Math. Phys. **32** (1992), no. 11, 1756-1766.

55. Peradze J., A numerical algorithm for a Kirchhoff-type nonlinear static beam. J. Appl. Math. **2009,** Art. ID 818269, 12 pp.

56. Peradze J., On the accuracy of the Galerkin method for a nonlinear dynamic beam equation. Math. Methods Appl. Sci. **34** (2011), no. 14, 1725-1732.
57. Peradze J., The existence of a solution and a numerical method for the Timoshenko nonlinear wave system. M2AN Math. Model. Numer. Anal. **38** (2004), no. 1, 1-26.
58. Peradze J., On the accuracy of an iteration method when solving a system of Timoshenko equations. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep. 34 (2008), 4-10.
59. Peradze J., A Kirchhoff type equation in a nonlinear model of shell vibration. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **97** (2017), no. 2, 144-158.
60. Peradze J., Kalichava Z., A numerical algorithm for the nonlinear Timoshenko beam system. Numer. Meth. Part. Diff. Equat. **36** (2020), no. 6, 1318-1347.
61. Peradze J., Kalichava Z., Tsiklauri Z., The accuracy of the finite difference scheme for a nonlinear dynamic beam problem. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math. **33** (2019), 55-58.
62. Pokhozhaev S. I., On a class of quasilinear hyperbolic equations. Mat. USSR Sbornik **25** (1975), no. 1, 145-158.
63. Reddy J. N., On the dynamic behaviour of the Timoshenko beam finite elements. Sādhanā **24** (1999), no. 3, 175-198.
64. Rivera Rodríguez P. H., On a nonlinear hyperbolic equation in Hilbert spaces. An. Acad. Brasil. Ciênc. **50** (1978), no. 2, 133-135.
65. Rogava J., Tsiklauri M., On local convergence of a symmetric semi-discrete scheme for an abstract analogue of the Kirchhoff equation. J. Comput. Appl. Math. **236** (2012), no. 15, 3654-3664.
66. Sapir M. H., Reiss E. L., Dynamic buckling of a nonlinear Timoshenko beam. SIAM J. Appl. Math. **37** (1979), no. 2, 290-301.
67. Semper B., Semi-discrete and fully discrete Galerkin methods for the vibrating Timoshenko beam. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **117** (1994), no. 3-4, 353-360.
68. Sherman J., Morrison W., Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. Ann. Math. Statistics **21** (1950), 124-127.

69. Torabi K., Ghassabi M., Heidari-Rarani M., Sharifi D., Variational iteration method for free vibration analysis of a Timoshenko beam under various boundary conditions, Inter. J. Engrg. Transactions A: Basics **30** (2017), no. 10, 1565-1572.

70. Timoshenko S., Young D., Vibration Problems in Engineering. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.

71. Timoshenko S., On the correction for shear of the differential equation for transvese vibrations of prismatic bars. Phil. Mag. **41** (1921), no. 6, 744-746.

72. Tucsnak M., On an initial and boundary value problem for the nonlinear Timoshenko beam. An. Acad. Brasil. Ciênc. **63** (1991), no. 2, 115-125.

73. Wah T., Large amplitude flexural vibration of rectangular plate. Int. J. Mech. Sci. **5** (1963), 425-438.

74. Woinowsky-Krieger S., The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. J. Appl. Mech. **17** (1950), 35-36.

ზ. ყალიჩავას შრომების სია

1. Kalichava Z., Peradze J., Approximation with respect to the spatial variable of the solution of a nonlinear dynamic beam problem. SCCTW 2016, South-Caucasus Computing and Technology Workshop, 15 p. https://indico.cern.ch/event/572800/contributions/2319225/attachments/1347739/2032986/conference_2016.pdf

2. Kalichava Z., Peradze J., Galerkin approximation of the solution of a nonlinear beam equation. Rep. Enlarg. Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. **31** (2017), 67-70. http://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol31/Kalichava_Peradze.pdf

3. Kalichava Z., Peradze J., The iteration stage of a numerical algorithm for a Timoshenko type beam equation. Appl. Math. Inform. Mech. I. Vekua Inst. Appl. Math. **23** (2018), no. 1, 23-29. https://www.viam.science.tsu.ge/Ami/2018_1/Kalichava,%20Peradze_AMIM_2018_1.pdf

4. Kalichava Z., The exactness of an algorithm step for a dynamic beam. Collec. Scien. Artic. Yerevan State Univ., Natur. Phys.-Math. Sci. **1 (24)** (2018), 95-101.
http://www.ysu.am/files/collection_of_scientific_articles_of_ysu_sss_1.1(24)_pages_95-101.pdf
5. Peradze J., Kalichava Z., Tsiklauri Z., The accuracy of the finite difference scheme for a nonlinear dynamic beam problem. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math. **33** (2019), 55-58.
http://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol33/Peradze_Jemal.pdf
6. Peradze J., Kalichava Z., A numerical algorithm for the nonlinear Timoshenko beam system. Numer. Meth. Part. Diff. Equat. **36** (2020), no. 6, 1318-1347.
(2019-2020 impact factor 2.236).
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/num.22475

ზ. ყალიჩავას მონაწილეობა კონფერენციებში

1. SCCTW'2016 – South-Caucasus Computing and Technology Workshop (Tbilisi, Georgia, October 4-7, 2016).
https://www.cadcamge.ch/2016/index.php?do=pro
2. VIII Annual International Meeting of the Georgian Mechanical Union (Tbilisi, Georgia, September 27-29, 2017).
http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/GeoMech8/AbstractBook.pdf
3. XXXI International Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics (Tbilisi, Georgia, April 19-21, 2017).
http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2017/sa.pdf
4. IV International Conference for Students and Young Researches, Yerevan State University (Yerevan, Armenia, October 2-6, 2017).
http://www.ysu.am/files/collection_of_scientific_articles_of_ysu_sss_1.1(24)_pages_95-101.pdf
5. XXXIII International Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics (Tbilisi, Georgia, April 23-25, 2019).
http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2019/program_eng.pdf